

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Extraordinaria 2026)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas

CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.

DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

Problema 1 Se está realizando un estudio sobre las ventas de mochilas de una marca deportiva en los pequeños establecimientos de una gran ciudad. Esta marca tiene dos tipos de mochilas, unas realizadas con material impermeable, que están indicadas preferentemente para deportes acuáticos, y otras fabricadas en lona no impermeable.

- a) (1,3 puntos) Se supone que el precio de las mochilas sigue una distribución normal con desviación típica de 25 euros. Si se ha seleccionado una muestra de 50 comercios y se ha obtenido que el precio medio de venta de estas mochilas es de 43,55 euros, obtenga un intervalo de confianza al 97,8 % para la media de la distribución.
- b) (1,2 puntos) Si se desea saber cuál es la proporción de clientes que prefieren las mochilas realizadas con material impermeable, ¿cuál es el número de comercios necesario para que dicha proporción tenga un error de muestreo inferior al 5 %? Utilice un nivel de confianza del 95 %. Considere el caso más conservador en el que $p = q = 0,5$.

Solución:

- a) $N(\mu; 25)$, $n = 50$, $\bar{X} = 43,55$ y $NC = 97,8\%$.
 $NC = 0,978 \Rightarrow 0,978 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,022 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,011$
 $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,011 = 0,989 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2,29$
 $E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,29 \frac{25}{\sqrt{50}} = 8,0964$
 $IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (43,55 - 8,0964; 43,55 + 8,0964) = (35,4536; 51,6464)$
- b) $E = 0,05$, $\hat{p} = 0,5 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,5$ y $NC = 0,95 \Rightarrow$
 $0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$
 $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
 $E = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96 \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,05 \Rightarrow n \geq 384,16 \Rightarrow n = 385$

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes:
a) o b).

Problema 2 (2,5 puntos)

- a) (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a.1. (1 punto) Calcule, si existe, la matriz $D = (AB + I)^{-1}$, donde M^{-1} significa la matriz inversa de M e I es la matriz identidad.
- a.2. (1,5 puntos) Obtenga, si existe, el valor de k para que se verifique $AA^t - kB^tB = C$, donde M^t representa la matriz transpuesta de la matriz M .
- b) (2,5 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a .

$$\begin{cases} 3x + ay = 1 \\ 2x - y + az = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

b.1. (1,5 puntos) Discuta la solución del sistema para los diferentes valores de a .

b.2. (1 punto) Resuelva el sistema para el valor $a = 3$.

Solución:

a) a.1. Tenemos $\begin{matrix} A & \cdot & B \\ 2 \times 3 & & 3 \times 2 \end{matrix} = \begin{matrix} AB \\ 2 \times 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} I \\ 2 \times 2 \end{matrix}$

$$D = (AB + I)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \stackrel{|AB+I| \neq 0}{=} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{a.2. } AA^t - kB^tB &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 11-2k & 3-k \\ 3-k & 5-2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 11-2k=5 \\ 3-k=0 \\ 5-2k=-1 \end{cases} \Rightarrow k=3 \end{aligned}$$

$$\text{b) b.1. Sea } \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & a & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = a^2 + 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = -6 \text{ y } a = 1.$$

☛ Si $a \in \mathbb{R} - \{-6, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

☛ Si $a = -6$:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right) = \\ &= \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 3F_2 \end{array} \right] = \\ &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema incompatible} \end{aligned}$$

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 10 & -6 & -2 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

b.2. Si $a = 3$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 12 & -6 & -2 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 12F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -18 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{sistema compatible determinado}$$

$$\begin{cases} -18z = 2 \Rightarrow z = -\frac{1}{9} \\ 5y + \frac{1}{9} = -1 \Rightarrow y = -\frac{2}{9} \\ x + \frac{6}{9} - \frac{2}{9} = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{9} \\ y = -\frac{2}{9} \\ z = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes:
a) o b).

Problema 3 (2,5 puntos)

a) Se está realizando un estudio sobre la utilización de IA por parte de los estudiantes universitarios en la elaboración de trabajos académicos. En dicho estudio participan un 30 % de estudiantes de Humanidades, un 45 % de estudiantes de Ciencias y un 25 % de estudiantes de Derecho. Además, por estudios anteriores, se estima que, en Humanidades el 15 % de los estudiantes utilizan la IA, en Ciencias el 5 % y en Derecho el 25 %.

- a.1. (0,9 puntos) Obtenga la probabilidad de que, elegido un trabajo al azar, haya sido realizado con la IA.
- a.2. (0,8 puntos) Si se selecciona un trabajo que no ha sido realizado con la IA, obtenga la probabilidad de que pertenezca a un estudiante de Derecho.
- a.3. (0,8 puntos) En la Facultad de Derecho, el detector de IA utilizado para este estudio tiene un 90 % de probabilidad de detectar los trabajos que realmente fueron realizados con IA, mientras que en un 8 % de las ocasiones clasifica los trabajos como realizados con la IA cuando realmente no se han realizado con dicha herramienta. Si al pasar un trabajo de un estudiante de Derecho por el detector este señala que se ha realizado con la IA, ¿cuál es la probabilidad de que efectivamente se haya realizado con la IA?

b) Se consideran dos sucesos A y B tales que

$$P(A \cap B) = 0,1 \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \quad P(A|B) = 0,4$$

Resuelva las siguientes preguntas:

- b.1. (0,5 puntos) $P(B)$
 b.2. (0,5 puntos) $P(A \cup B)$
 b.3. (0,5 puntos) $P(A)$
 b.4. (0,5 puntos) $P(\bar{A}|\bar{B})$
 b.5. (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos A y B ? Justifique la respuesta
Nota: $\bar{S}$ denota el suceso complementario (contrario) del suceso S .

Solución:

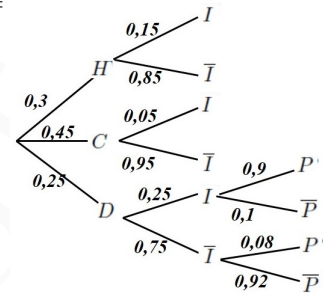
- a) Sean H estudia Humanidades, C estudia Ciencias, D estudia Derecho, I utiliza IA, $\bar{I}$ no utiliza IA, P el detector da positivo y $\bar{P}$ el detector da negativo.

a.1. $P(I) = P(I|H)P(H) + P(I|C)P(C) + P(I|D)P(D) = 0,15 \cdot 0,3 + 0,05 \cdot 0,45 + 0,25 \cdot 0,25 = 0,13$

a.2. $P(D|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|D)P(D)}{P(\bar{I})} = \frac{0,75 \cdot 0,25}{1 - 0,13} \simeq 0,2155$

- a.3. En la Facultad de Derecho:

$$P(I|P) = \frac{P(P|I)P(I)}{P(P)} = \frac{P(P|I)P(I)}{P(P|I)P(I) + P(P|\bar{I})P(\bar{I})} = \frac{0,9 \cdot 0,25}{0,08 \cdot 0,75 + 0,9 \cdot 0,25} \simeq 0,7895$$



- b) Tenemos: $P(A \cap B) = 0,1$ $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7$ $P(A|B) = 0,4$

b.1. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4} = 0,25$

b.2. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,7 \implies P(A \cup B) = 0,3$

b.3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(B) = 0,3 + 0,1 - 0,25 = 0,15$

b.4. $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,7}{1 - 0,25} = 0,9333$

- b.5. Tenemos $P(A)P(B) = 0,15 \cdot 0,25 = 0,0375 \neq 0,1 = P(A \cap B)$.
 Como $P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \implies A$ y B no son independientes.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes:
 a) o b)

Problema 4 (2,5 puntos)

- a) Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-3x+2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a.1. (0,5 puntos) Determine razonadamente el dominio de la función.
 a.2. (1 punto) Estudie la continuidad de la función en $x = 0$.

- a.3. (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Existe algún extremo de esta función?
- b) (2,5 puntos) Considera la función real de variable real

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$$

- b.1. (1 punto) Obtenga los valores de a y b para que la recta tangente a la función en el punto $(1, 2)$ sea horizontal.
- b.2. (1,5 puntos) Si $a = -10$ y $b = 0$, calcule el área delimitada por la función, el eje horizontal y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

$$a) f(x) = \begin{cases} e^{-3x+2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a.1. La rama $x < 0$ tiene una exponencial donde la función será continua y su dominio toda la rama. La rama $x \geq 0$ es un cociente de polinomios y el denominador se anula en $x = -1$ fuera de la rama y será continua en ella y su dominio toda la rama. Luego $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- a.2. Continuidad en $x = 0$

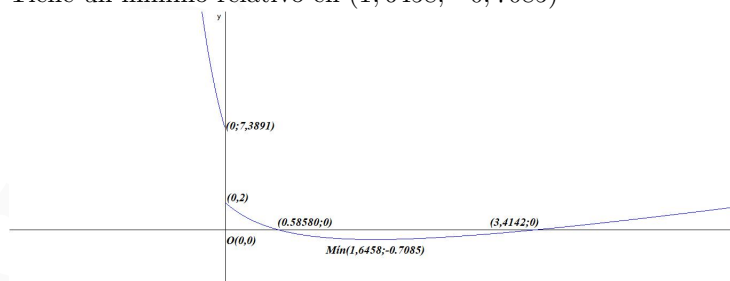
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-3x+2} = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 1} = 2 \\ f(0) = 2 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

f es discontinua no evitable en $x = 0$ (Hay un salto)

$$a.3. f'(x) = \begin{cases} -3e^{-3x+2} < 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 + 2x - 6}{(x + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 1,6458, x = -3,6458 \text{ no válida} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0; 1,6458)$	$(1,6458; \infty)$
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0; 1,6458)$ y creciente en el $(1,6458; \infty)$. Tiene un mínimo relativo en $(1,6458; -0,7085)$



b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b \implies f'(x) = 3x^2 + 6x + a$

b.1. $\begin{cases} f(1) = 2 \implies a + b + 4 = 2 \\ f'(1) = 0 \implies 9 + a = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -9 \\ b = 7 \end{cases}$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$$

Como $f''(x) = 6x + 6 \implies f''(1) = 12 > 0$ el punto $(1, 2)$ es un mínimo y la tangente a la curva en ese punto es horizontal.

b.2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x = 0 \implies x = -5, x = 0$ y $x = 2$. Luego hay dos recintos de integración $S_1 : [1, 2]$ y $S_2 : [2, 3]$

$$F(x) = \int (x^3 + 3x^2 - 10x) dx = \frac{x^4}{4} + x^3 - 5x^2 + C$$

$$S_1 = \int_1^2 (x^3 + 3x^2 - 10x) dx = F(2) - F(1) = -\frac{17}{4}$$

La función está por debajo del eje de abscisas.

$$S_2 = \int_2^3 (x^3 + 3x^2 - 10x) dx = F(3) - F(2) = \frac{41}{4}$$

La función está por encima del eje de abscisas.

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{17}{4} + \frac{41}{4} = \frac{29}{2} = 14,5 \text{ u}^2$$

