Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Febrero 2026

Problema 1 (2,5 puntos)

a) I. (1,2 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{x+1} & \text{si} \quad x \le -1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ b \cdot \log(12 - x) & \text{si} \quad 2 \le x < 12 \end{cases}$$

siendo a y b números reales. Determine los valores de a y b para que la función f sea continua en su dominio.

II. (1,3 puntos) Represente el recinto acotado, limitado por la recta $y = -x + 3$ y la parábola $y = -x^2 + 5$. Calcule el área del recinto.

b) El nivel de concentración de un alumno universitario durante un examen viene dado por la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t + 10 & \text{si} \quad 0 \le t \le 2,5 \\ t^2 + at + b & \text{si} \quad 2,5 < t \le 5 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas y a y b números reales.

I. (1,25 puntos) ¿Con qué nivel de concentración el alumno comienza el examen? Determine los valores de a y b para que la función f sea continua y derivable en $t = 2,5$.

II. (1,25 puntos) Para $a = -8$ y $b = 22,5$, esboce la gráfica de la función f, estudiando previamente la monotonía y calculando en qué momentos se alcanzan los niveles máximo y mínimo de concentración.

Solución:

a) I. ☛ Las tres ramas son continuas en el dominio de la función. Son una exponencial, un polinomio y una función logarítmica que toma valores positivos en todo el dominio definido.

☛ En $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} (a \cdot e^{x+1}) = a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} (x^2 - 2) = -1 \\ f(-1) = a \end{cases} \xrightarrow{\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)}$$

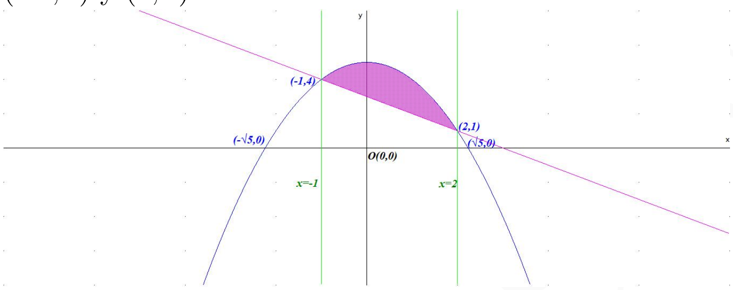
$a = -1$

- ☛ En $x = 2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x^2-2) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(b\log(12-x)) = b \\ f(2) = 2 \end{cases} \xRightarrow{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)} b = 2$$

- ☛ Cuando $a = -1$ y $b = 2 \Longrightarrow f$ es continua en $[-1, 12)$

II. $f(x) = -x^2 + 5$ es una parábola vertical, PAR con vértice en el punto (0,5) y corta al eje OX en los puntos $(\pm\sqrt{5}, 0)$.
La recta corta a los ejes coordenados en $(0,3)$ y $(3,0)$
Esta parábola corta a la recta $g(x) = -x + 3$ en los puntos siguientes:
$-x^2+5 = -x+3 \Longrightarrow -x^2+x+2 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 2$. Serían los puntos $(-1,4)$ y $(2,1)$.



$$S = \int_{-1}^{2} (f(x)-g(x))\,dx = \int_{-1}^{2} (-x^2+x+2)\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}\ u^2$$

El resultado de la integral es positiva por estar el arco parabólico por encima de la recta.

b) I. ☛ Continuidad en $t = 2,5$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 2,5^-} f(x) = \lim\limits_{t\to 2,5}(-t^2+2t+10) = 8,75 \\ \lim\limits_{t\to 2,5^+} f(x) = \lim\limits_{t\to 2,5}(t^2+at+b) = 2,5a+b+6,25 \\ f(2,5) = 8,75 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\lim\limits_{t\to 2,5^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 2,5^+} f(t) = f(2,5)} 2,5a+b+6,25 = 8,75 \Longrightarrow 2,5a+b = 2,5$$

☛ Derivabilidad en $t = 2,5$:

$$f'(t) = \begin{cases} -2t+2 & \text{si} \quad 0 \le t \le 2,5 \\ 2t+a & \text{si} \quad 2,5 < t \le 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(2,5^-) = -3 \\ f'(2,5^+) = a+5 \end{cases} \xRightarrow{f'(2,5^-) = f'(2,5^+)} a+5 = -3 \Longrightarrow a = -8$$

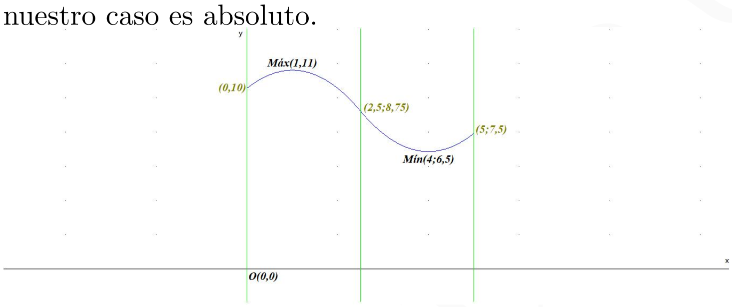
☛ $$\begin{cases} 2,5a+b = 2,5 \\ a = -8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 22,5 \end{cases}$$

II. Si $a = -8$ y $b = 22,5 \Longrightarrow f(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t + 10 & \text{si} \quad 0 \le t \le 2,5 \\ t^2 - 8t + 22,5 & \text{si} \quad 2,5 < t \le 5 \end{cases}$

$$f'(t) = \begin{cases} -2t + 2 = 0 \Longrightarrow t = 1 & \text{si} \quad 0 \le t \le 2,5 \\ 2t - 8 = 0 \Longrightarrow t = 4 & \text{si} \quad 2,5 < t \le 5 \end{cases}$$

	$(0;1)$	$(1;2,5)$	$(2,5;4)$	$(4;5)$
$f'(t)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(t)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

El nivel de concentración del alumno es creciente en la primera hora y en la última $(0,1) \cup (4,5)$ mientras que la concentración decrece entre la primera y cuarta hora $(1,4)$.
Tenemos $f(0) = 10$, $f(5) = 7,5$ La concentración es máxima cuando se llega a la primera hora $t = 1 \Longrightarrow (1,11)$ donde se produce un máximo relativo, en nuestro caso es absoluto. La concentración es mínima cuando se llega a la cuarta hora $t = 4 \Longrightarrow (4;6,5)$ donde se produce un mínimo relativo, en nuestro caso es absoluto.



Problema 2 (2,5 puntos)

a) a.I (1,5 puntos) El índice de audiencia de un programa de radio se puede modelizar por una función del tipo:

$$f(t) = at^2 + bt + c, \quad t \in [0,60]$$

donde t es el tiempo medido en minutos y $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se sabe que cuando comienza el programa el índice de audiencia es 20 puntos y que a los 40 minutos se alcanza el máximo índice de audiencia, que es 36 puntos. Determine a, b y c y represente gráficamente la función obtenida.

a.II (1 punto) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) \qquad h(x) = (2x - 1)e^{x^2 - x}$$

b) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 10 + \dfrac{5x}{2} & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad -2 < x \le 2 \\ 10 - \dfrac{5x}{2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

b.I (0,5 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de f en el punto de abscisa $x = -2$.

b.II (0,75 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f con pendiente -1.

b.III (1,25 puntos) Represente la región del plano acotada superiormente por la gráfica de f e inferiormente por el eje de abscisas. Calcule el área de dicha región.

Solución:

a) a.I $f(t) = at^2 + bt + c \Longrightarrow f'(t) = 2at + b \Longrightarrow f''(t) = 2a$

$$\begin{cases} f(0) = 20 \Longrightarrow 0 + 0 + c = 20 \\ f(40) = 36 \Longrightarrow 1600a + 40b + c = 36 \\ f'(40) = 0 \Longrightarrow 80a + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{100} \\ b = \dfrac{4}{5} \\ c = 20 \end{cases} \Longrightarrow$$

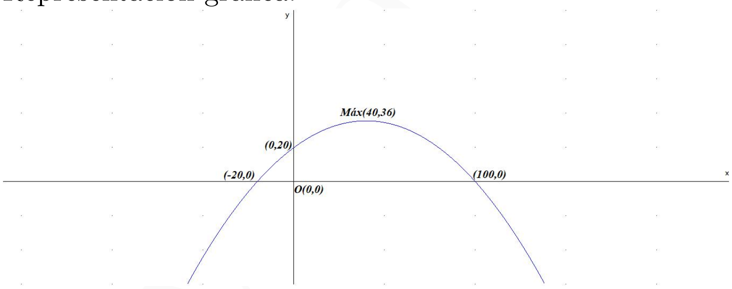
$f(t) = -\dfrac{1}{100}t^2 + \dfrac{4}{5}t + 20$

Como $f''(40) = -\dfrac{1}{50} < 0 \Longrightarrow t = 40$ es un máximo relativo.

Como la función es un polinomio de segundo grado, este máximo es el único extremo relativo.

La función corta con el eje de ordenadas en el punto $(0, 20)$ y con el eje de abscisas en $f(t) = 0 \Longrightarrow -\dfrac{1}{100}t^2 + \dfrac{4}{5}t + 20 = 0 \Longrightarrow t = -20$ y $t = 100 \Longrightarrow (-20, 0)$ y $(100, 0)$.

Representación gráfica:



a.II ☛ $g(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)$

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{x^4-1} = \frac{4x}{x^4-1}$$

☛ $h(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$

$h'(x) = 2e^{x^2-x} + (2x-1)(2x-1)e^{x^2-x} = (2 + (2x-1)^2)e^{x^2-x} = (4x^2 - 4x + 3)e^{x^2-x}$

b) b.I ☛ Continuidad en $x = -2$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} (10 + \dfrac{5x}{2}) = 5 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2} (x^2+1) = 5 \\ f(-2) = 5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\qquad\qquad]{\lim\limits_{x\to -2^-} f(t) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(t) = f(-2)} f \text{ continua en } x=-2.$$

☛ Derivabilidad en $x=-2$:

$$f'(t) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} & \text{si} & x<-2 \\ 2x & \text{si} & -2<x<2 \\ -\dfrac{5}{2} & \text{si} & x>2 \end{cases} \quad \begin{cases} f'(-2^-) = \dfrac{5}{2} \\ f'(-2^+) = -4 \end{cases} \xrightarrow{f'(-2^-)\neq f'(-2^+)}$$

f no es derivable en $x=-2$.

b.II $$m = f'(a) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} \neq -1 & \text{si} & x<-2 \\ 2a=-1 \Longrightarrow a=-\dfrac{1}{2} \Longrightarrow b=f(a)=\dfrac{5}{4} & \text{si} & -2<x<2 \\ -\dfrac{5}{2}\neq -1 & \text{si} & x>2 \end{cases} \xrightarrow{y-b=m(x-a)}$$

$$y-\frac{5}{4} = -\left(x+\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow y=-x+\frac{3}{4}$$

b.III Calculamos los puntos de corte de f con los ejes de coordenadas:
Con el eje OY hacemos $x=0$: $f(0)=0+1 \Longrightarrow (0,1)$ Sólo puede haber un punto de corte con el eje de ordenadas.
Con el eje OX hacemos $f(x)=0$:

$$\begin{cases} 10+\dfrac{5x}{2}=0 \Longrightarrow x=-4 \Longrightarrow (-4,0) & \text{si} & x\le -2 \\ x^2+1=0 \text{ no tiene solución} & \text{si} & -2<x\le 2 \\ 10-\dfrac{5x}{2}=0 \Longrightarrow x=4 \Longrightarrow (4,0) & \text{si} & x>2 \end{cases}$$

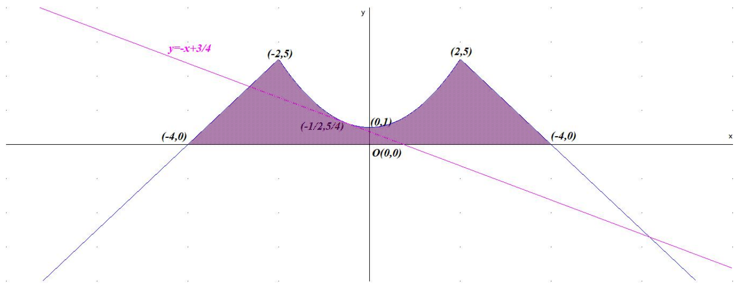
Habría tres recintos de integración $S_1: [-4,-2]$, $S_2: [-2,2]$ y $S_3: [2,4]$.

$$S_1 = \int_{-4}^{-2} \left(10+\frac{5x}{2}\right) dx = 10x+\frac{5x^2}{4}\bigg]_{-4}^{-2} = 5$$

$$S_2 = \int_{-2}^{2} \left(x^2+1\right) dx = \frac{x^3}{3}+x\bigg]_{-2}^{2} = \frac{28}{3}$$

$$S_3 = \int_{2}^{4} \left(10-\frac{5x}{2}\right) dx = 10x-\frac{5x^2}{4}\bigg]_{2}^{4} = 5$$

$$S = |S_1|+|S_2|+|S_3| = 5+\frac{28}{3}+5 = \frac{58}{3} \simeq 19,3333\ u^2$$


y
y=-x+3/4
(-2,5)
(2,5)
(0,1)
(-1/2,5/4)
(-4,0)
(-4,0)
x
O(0,0)