Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Octubre 2025

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 11 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 11 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 11 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 3 & -1 \\ 2 & m+1 & 0 \\ m & -5 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.

b) Calcular A^{-1} para $m = 2$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} m & 2 & 0 \\ -m & 2 & m \\ -m & 10 & 3 \end{vmatrix} = 12m(1-m) = 0 \Longrightarrow m = 0, \quad m = 1$$

Si $m = 0$ o $m = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 10 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/12 & 1/4 & -1/6 \\ -1/12 & -1/4 & 1/6 \\ 2/3 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$

Problema 3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcular A^n y en particular A^{2025}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{2025} = \begin{pmatrix} 1 & 2025 & 2025 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a+2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b+2d = 2a+b \Longrightarrow d = a \\ c = c \Longrightarrow c = 0 \\ d = 2c+d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Problema 5 En el Congreso Catalán de Educación Matemática (C2EM), que se celebrará en Lleida el próximo mes de julio, asistirán docentes de universidad, de educación secundaria y de educación infantil y primaria.
A estas alturas, un 10 % de los docentes inscritos son de universidad, un 50 % son de secundaria y el resto son de infantil y primaria.

La organización del Congreso quiere dar un detalle diferente a cada grupo de docentes: el detalle tipo $D1$ para el grupo de docentes universitarios, el detalle tipo $D2$ para el grupo de docentes de secundaria y el detalle tipo $D3$ para el grupo de docentes de infantil y primaria. Han pedido presupuesto a tres empresas distintas, que llamaremos $E1$, $E2$ y $E3$. La siguiente matriz nos da los precios unitarios, en euros, de cada detalle de tipos $D1$, $D2$ y $D3$ (filas) según las empresas $E1$, $E2$ y $E3$ (columnas):

$$\begin{pmatrix} 1{,}25 & 1 & 1{,}25 \\ 0{,}75 & 1 & 1{,}15 \\ 1 & 0{,}85 & 0{,}80 \end{pmatrix}$$

El pedido de la organización puede representarse como un vector fila (x, y, z), en el que x representa la cantidad de detalles de tipo $D1$, y es la cantidad de detalles de tipo $D2$ y z corresponde a la cantidad de detalles de tipo $D3$ a comprar.
La organización trabaja con la previsión de que en el Congreso asistirán 1.000 personas en total y que los porcentajes de cada grupo de docentes respecto al total serán los mismos que los que existen en este momento de la inscripción.
Calcule mediante un producto de matrices qué empresa ofrece el mejor precio y cuál es ese precio.
Solución:
Tendríamos las tablas:

$D1$	$D2$	$D3$
$0,1$	$0,5$	$0,4$

y

	$E1$	$E2$	$E3$
$D1$	1,25	1	1,25
$D2$	0,75	1	1,15
$D3$	1	0,85	0,80

Luego:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = 1000 \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,25 & 1 & 1,25 \\ 0,75 & 1 & 1,15 \\ 1 & 0,85 & 0,80 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 100 & 500 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,25 & 1 & 1,25 \\ 0,75 & 1 & 1,15 \\ 1 & 0,85 & 0,80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 & 940 & 1020 \end{pmatrix}$$

El mejor precio lo ofrece la empresa $E1$ con 900€.