Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Febrero 2026

Problema 1 (2,5 puntos) Cada apartado a y b.

a) (2,5 puntos) Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ su producto vectorial. Se definen $a = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$, $b = \overrightarrow{v} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$ y $c = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$. Indica si a, b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$.

b) I. (1 punto) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por el punto $P(4,-3,0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$.

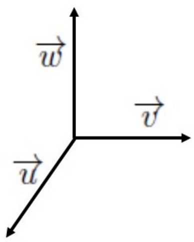
II. (1,5 punto) Halla la ecuación del plano que contiene al punto $Q(1,2,3)$ y a la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right.$$

Solución:

a) Tenemos:

$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$,
$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}$,
$\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.
Por el contrario $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{w}$



- $a = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{w}$, luego $\overrightarrow{a}$ es un vector perpendicular a $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y paralelo a $\overrightarrow{w}$.
- $b = \overrightarrow{v} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{w}$, luego $\overrightarrow{b}$ es un vector, que será paralelo a $\overrightarrow{w}$ y perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.
- $c = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{u}|\cos 0^\circ = |\overrightarrow{u}|^2$ se trata de un escalar.

b) I $s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,1) \\ P_s = P(4,-3,0) \end{array} \right. \Longrightarrow s: \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + \lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

II $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{array} \right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,-3) \\ P_r(0,0,1) \end{array} \right.$

$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{P_rQ} = (1,2,2) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,1,-3) \\ P_r(0,0,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -8x + 7y - 3z + 3 = 0$$

$$\pi' : 8x - 7y + 3z - 3 = 0$$

Problema 2 (2,5 puntos) Cada apartado a y b.

a) (2,5 puntos) Se consideran los puntos $A(2,1,3)$ y $B(0,-1,1)$,

a.1 (1,25 puntos) Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a el.

a.2 (1,25 puntos) Dado el plano $\pi' : x + y + z = 3$, razona valores de y y de z para que $C = (2, y, z) \in \pi'$ y la distancia de C a A sea de 3 unidades.

b) (2,5 puntos) Se consideran los puntos $P(1,1,1)$, $Q(1,0,1)$ y el vector $\overrightarrow{v} = (1,-1,1)$

b.1 (0,75 puntos) Calcula la ecuación continua de la recta r que pasa por P y en la dirección de $\overrightarrow{v}$.

b.2 (0,75 puntos) Calcula las ecuaciones de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por Q.

b.3 (1 punto) Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Solución:

a) a.1 π es el plano mediador, el lugar geométrico de los puntos $P(x,y,z)$ tales que

$$d(P,A) = d(P,B) \Longrightarrow |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Longrightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2} \Longrightarrow \pi : x+y+z = 3$$

a.2 $C = (2, y, z) \in \pi' : x + y + z = 3 \Longrightarrow y + z = 1$
$|\overrightarrow{AC}| = |(2,y,z) - (2,1,3)| = \sqrt{(y-1)^2 + (z-3)^2} = 3 \Longrightarrow (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9 \xrightarrow{z=1-y} (y-1)^2 + (-y-2)^2 = 9 \Longrightarrow 2(y^2 + y - 2) = 0 \Longrightarrow$
$\begin{cases} y = -2 \Longrightarrow z = 3 \Longrightarrow C_1(2,-2,3) \\ y = 1 \Longrightarrow z = 0 \Longrightarrow C_2(2,1,0) \end{cases}$

b) (2,5 puntos) Se consideran los puntos $P(1,1,1)$, $Q(1,0,1)$ y el vector $\overrightarrow{v} = (1,-1,1)$

b.1 $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{v} = (1,-1,1) \\ P_r = P(1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

b.2 Seguimos el siguiente método:

- ☛ Calculamos un plano $\pi' \perp r$ tal que $Q \in \pi'$:
$\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \Longrightarrow x - y + z + K = 0 \xrightarrow{Q\in\pi'} 2 + K = 0 \Longrightarrow K = -2 \Longrightarrow$
$$\pi' : x - y + z - 2 = 0$$
- ☛ Calculamos el punto Q' de corte de π' con $r \Longrightarrow (1+\lambda) - (1-\lambda) + (1+\lambda) - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{3} \Longrightarrow Q'\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\frac{4}{3}\right)$
- ☛ La recta s pasa por Q y Q':
$s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{QQ'} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\frac{4}{3}\right) - (1,0,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(1,2,1) \\ P_s = Q(1,0,1) \end{array}\right. \Longrightarrow$
$$s : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array}\right. \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

b.3 $\pi'' : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,2,1) \\ P_s(1,0,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi'' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 3z = 0 \Longrightarrow \pi'' : x - z = 0$