Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2026

Problema 1 (2,5 puntos) Cada apartado a y b.

a) Sean $A(1,2,3)$, $B(1,0,-1)$ y $C(2,2,2)$ tres puntos en el espacio y $\overrightarrow{v_1}$ el vector que va de A a B; $\overrightarrow{v_2}$ el vector que va de B a C y $\overrightarrow{v_3}$ el vector que va de C a A.

I (1,25 puntos) Estudia si los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ son linealmente independientes.

II (1,25 puntos) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

b) Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{array}\right.$ y además pasa por el punto $(3,2,1)$.

Solución:

a) I $\overrightarrow{v_1}=(1,0,-1)-(1,2,3)=(0,-2,-4)$, $\overrightarrow{v_2}=(2,2,2)-(1,0,-1)=(1,2,3)$ y $\overrightarrow{v_3}=(1,2,3)-(2,2,2)=(-1,0,1)$.

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2} \text{ y } \overrightarrow{v_3} \text{ son linealmente dependientes.}$$

II $\overrightarrow{AB}=(0,-2,-4)$ y $\overrightarrow{AC}=(1,0,-1)$.

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right||=\frac{1}{2}|(2,-4,2)|=|(1,-2,1)|=\sqrt{6}\ u^2$$

b) $$r:\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(0,1,1) \\ P_r(-1,2,0) \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_r}=(0,1,1) \Longrightarrow y+z+a=0 \xrightarrow{(3,2,1)\in\pi} 2+1+a=0 \Longrightarrow a=-3$$

$$\pi: y+z-3=0$$

Problema 2 (2,5 puntos) Cada apartado a y b.

a) (2,5 puntos) Se están construyendo dos puentes rectos en un tramo de autovía para los dos carriles. Los puentes siguen las ecuaciones siguientes:

$$r_1(t)=(2+t,-1-2t,3+2t),\quad r_2(s)=(1+2s,4-s,4-2s)$$

Se pide:

a.1 (1,25 puntos) Estudia si los puentes son paralelos, se cortan o se cruzan a.2 (1,25 puntos) La empresa quiere construir un puente de servicio que los una, y quiere que sea lo más corto posible, ¿qué longitud tendrá la vía de servicio? Indica los puntos inicio y final del pasadizo.

b) (2,5 puntos) Se consideran los puntos siguientes: $A(1,2,3)$, $B(-2,1,4)$, $C(3,0,5)$ y $D(0,-1,2)$. Se pide

b.1 (1 punto) Estudia si los puntos pertenecen a un mismo plano.

b.2 (0,75 puntos) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

b.3 (0,75 puntos) Calcula el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

Solución:

a) Tenemos $r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-2,2) \\ P_{r_1}(2,-1,3) \end{cases}$ $\quad r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (2,-1,-2) \\ P_{r_2}(1,4,4) \end{cases}$

a.1 Tenemos: $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-1,5,1)$

$[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}] = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0 \Longrightarrow r_1$ y r_2 se cruzan.

Los puentes se cruzan.

a.2 Calculamos la ecuación de una recta r perpendiculara a ambas y las corta.

$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (6,6,3) = 3(2,2,1)$$

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,2,1) \\ \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-2,2) \\ P_{r_1}(2,-1,3) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6x-3y-6z+3 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,2,1) \\ \overrightarrow{u_{r_2}} = (2,-1,-2) \\ P_{r_2}(1,4,4) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3x+6y-6z+3 = 0$$

$$r : \begin{cases} 6x-3y-6z+3 = 0 \\ -3x+6y-6z+3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} 2x-y-2z+1 = 0 \\ -x+2y-2z+1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Punto de corte de r con r_1:

$$\begin{cases} x = -1+2\lambda = 2+t \\ y = -1+2\lambda = -1-2t \\ z = \lambda = 3+2t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Longrightarrow P(1,1,1)$$

Punto de corte de r con r_2:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 2\lambda = 1 + 2s \\ y = -1 + 2\lambda = 4 - s \\ z = \lambda = 4 - 2s \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ s = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow Q(3,3,2)$$

La vía de servicio uniría los puntos $P(1,1,1)$ y $Q(3,3,2)$
La vía de servicio que une estos puntos tiene una distancia:

$$d(PQ) = |(3,3,2) - (1,1,1)| = |(2,2,1)| = \sqrt{4+4+1} = 3\ u$$

b) Tenemos: $\overrightarrow{AB} = (-3,-1,1)$, $\overrightarrow{AC} = (2,-2,2)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1,-3,-1)$

b.1 $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \Longrightarrow$ los puntos no son coplanarios.

b.2 $S_t = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}|(0,8,8)| = 4\sqrt{2}\ u^2$

b.3 $V_T = \dfrac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \dfrac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix}\right| = \dfrac{1}{6}|-32| = \dfrac{16}{3} \simeq 5,3333\ u^3$