Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2026

Problema 1 (2,5 puntos) Sean los puntos $A(3,-1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-2,-2,1)$.

a) (1 punto) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) (1,5 puntos) Halla los puntos D pertenecientes al eje OZ para que el tetraedro de vértices A, B, C y D tenga un volumen de 20 unidades cúbicas.

Solución:

a) Sean $\overrightarrow{AB} = (1,3,-3) - (3,-1,1) = (-2,4,-4)$ y
$\overrightarrow{AC} = (-2,-2,1) - (3,-1,1) = (-5,-1,0)$

$$S_t = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -2 & 4 & -4 \\ -5 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|(-4,20,22)| = 15\ u^2$$

b) El punto $D(0,0,a)$ y tenemos:
$\overrightarrow{AB} = (1,3,-3) - (3,-1,1) = (-2,4,-4)$,
$\overrightarrow{AC} = (-2,-2,1) - (3,-1,1) = (-5,-1,0)$ y
$\overrightarrow{AD} = (0,0,a) - (3,-1,1) = (-3,1,a-1)$

$$V_T = \frac{1}{6}\cdot|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -5 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & a-1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6}|2(11a+5)| = 20 \Longrightarrow$$

$$|11a+5| = 60 \Longrightarrow \begin{cases} 11a+5 = 60 \Longrightarrow a = 5 \Longrightarrow D_1(0,0,5) \\ 11a+5 = -60 \Longrightarrow a = -\dfrac{65}{11} \Longrightarrow D_2\left(0,0,-\dfrac{65}{11}\right) \end{cases}$$

Problema 2 (2,5 puntos) Considera el plano $\pi \equiv 2x + y + 2z + 5 = 0$.

a) (1,5 puntos) Calcula el punto simétrico de $P(1,0,1)$ respecto de π.

b) (1 punto) Calcula los planos paralelos a π y que disten 2 unidades de π.

Solución:

a) ☛ Calculamos una recta $r \perp \pi$ tal que $P \in \pi$: $(\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_r}) \Longrightarrow$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,2) \\ P_r = P(1,0,1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- ☛ Calculamos el punto P' de corte de r con π
$2(1+2\lambda)+(\lambda)+2(1+2\lambda)+5=0 \Longrightarrow 9(\lambda+1)=0 \Longrightarrow \lambda=-1 \Longrightarrow$
$P'(-1,-1,-1)$

- ☛ El punto P' anterior es el punto medio entre el que buscamos P'' y P:
$\dfrac{P+P''}{2}=P' \Longrightarrow P''=2P'-P=(-2,-2,-2)-(1,0,1)=(-3,-2,-3)$

b) Un plano $\pi' \parallel \pi$ tiene de ecuación $2x+y+2z+K=0$ y el punto $Q(0,-5,0)$ es un punto elegido al azar en π. Se tiene que cumplir:
$d(Q,\pi')=\dfrac{|0-5+0+k|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{|-5+k|}{3}=2 \Longrightarrow |k-5|=6 \Longrightarrow$
$\begin{cases} k-5=6 \Longrightarrow k=11 \Longrightarrow \pi'_1: 2x+y+2z+11=0 \\ k-5=-6 \Longrightarrow k=-1 \Longrightarrow \pi'_2: 2x+y+2z-1=0 \end{cases}$

Problema 3 (2,5 puntos) Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+z=3 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx-y-2z=5$.

a) (1,25 puntos) Halla m para que r y π sean paralelos.

b) (1,25 puntos) Para $m=-8$, calcula la distancia de la recta r al plano π.

Solución:

a) $r: \begin{cases} x-y+z=3 \\ x+2y-z=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=7-2\lambda \\ z=10-3\lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,-2,-3) \\ P_r(0,7,10) \end{cases}$
Sustituimos r en π: $m\lambda-(7-2\lambda)-2(10-3\lambda)=5 \Longrightarrow (m+8)\lambda=32 \Longrightarrow$

- ☛ Si $m=-8 \Longrightarrow !0=32! \Longrightarrow r \parallel \pi$
- ☛ Si $m \neq -8 \Longrightarrow \lambda=\dfrac{32}{m+8} \Longrightarrow r$ y π se cortan.

b) Si $m=-8$ la recta y el plano son paralelos según el apartado anterior. Luego:
$d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\dfrac{|-8\cdot 0-7-2\cdot 10-5|}{\sqrt{64+1+4}}=\dfrac{|-32|}{\sqrt{69}}=\dfrac{32\sqrt{69}}{69}\ u$

Problema 4 (2,5 puntos) Sean las rectas $r \equiv \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-3-2\lambda \end{cases}$.

a) (1 punto) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

b) (1,5 punto) Halla la ecuación de un plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s.

Solución:

$$r: \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1} \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (4,3,-1) \\ P_r(-1,-2,2) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = -1+4\mu \\ y = -2+3\mu \\ z = 2-\mu \end{array} \right. , \ \forall \mu \in \mathbb{R}$$

$$s: \left\{ \begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -3-2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,1,-2) \\ P_s(1,2,-3) \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{P_sP_r} = (-1,-2,2) - (1,2,-3) = (-2,-4,5)$

$$[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) Sea $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-5,9,7)$

$$\pi: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v} = (-5,9,7) \\ \overrightarrow{u_r} = (4,3,-1) \\ P_r(-1,-2,2) \end{array} \right. \quad \pi = \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-2 \\ -5 & 9 & 7 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -30x+23y-51z+118 = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi: 30x - 23y + 51z - 118 = 0$$