Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2025

Problema 1 (2,5 puntos) Considera el plano π, determinado por los puntos $A(-1,0,0)$, $B(0,1,1)$ y $C(2,1,0)$, y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-2z-3=0 \\ y-z-2=0 \end{array} \right.$. Halla los puntos de r cuya distancia a π es $\sqrt{14}$ unidades.

Solución:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x-2z-3=0 \\ y-z-2=0 \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x=3+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,1) \\ P_r(3,2,0) \end{array} \right.$$

$$\pi: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{AC}=(3,1,0) \\ A(-1,0,0) \end{array} \right. \quad \pi = \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x+3y-2z-1=0 \Longrightarrow \pi: x-3y+2z+1=0$$

Sea $P(x,y,z)\in r \Longrightarrow P(3+2\lambda, 2+\lambda, \lambda)$ y cumple $d(P,\pi)=\sqrt{14}$:

$$d(P,\pi)=\frac{|3+2\lambda-3(2+\lambda)+2\lambda+1|}{\sqrt{1+9+4}}=\frac{|\lambda-2|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}\Longrightarrow |\lambda-2|=14\Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda-2=14\Longrightarrow \lambda=16\Longrightarrow P_1(35,18,16) \\ \lambda-2=-14\Longrightarrow \lambda=-12\Longrightarrow P_2(-21,-10,-12) \end{array} \right.$$

Problema 2 (2,5 puntos) Considera el paralelogramo cuyos vértices consecutivos son los puntos $P(-1,2,3)$, $Q(-2,1,0)$, $R(0,5,1)$ y S.

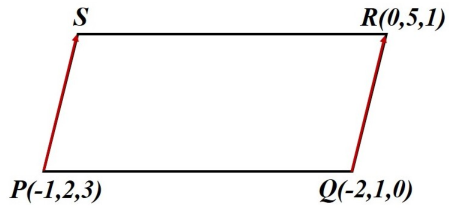
a) (1 punto) Halla las coordenadas del punto S.

b) (1,5 punto) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos P, Q y R.

Solución:

a) Ordenamos los puntos consecutivamente:

$S=P+\overrightarrow{PS}=P+\overrightarrow{QR}=(-1,2,3)+(2,4,1)=(1,6,4)$



b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1,-1,-3) \\ \overrightarrow{PS} = (2,4,1) \\ P(-1,2,3) \end{cases}$ $\pi = \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 11x - 5y - 2z + 27 = 0$

$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (11,-5,-2) \\ P_r = O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 11\lambda \\ y = -5\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}, \ \forall\lambda \in \mathbb{R}$

Problema 3 (2,5 puntos) Sean los puntos $O(0,0,0)$, $A(0,2,-2)$, $B(1,2,m)$ y $C(2,3,2)$.

a) (1,25 puntos) Halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los puntos O, A, B y C tenga un volumen de 3 unidades cúbicas.

b) (1,25 puntos) Para $m = 0$, calcula la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A, B y C.

Solución:

a) Sean $\overrightarrow{OA} = (0,2,-2) - (0,0,0) = (0,2,-2)$,
$\overrightarrow{OB} = (1,2,m) - (0,0,0) = (1,2,m)$ y
$\overrightarrow{OC} = (2,3,2) - (0,0,0) = (2,3,2)$.

$V = \dfrac{1}{6}|[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}]| = \dfrac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}\right| = \dfrac{1}{6}|4m-2| = 3 \Longrightarrow |4m-2| = 18 \Longrightarrow$

$\begin{cases} 4m - 2 = 18 \Longrightarrow m = 5 \\ 4m - 2 = -18 \Longrightarrow m = -4 \end{cases}$

b) Para $m = 0 \Longrightarrow A(0,2,-2)$, $B(1,2,0)$ y $C(2,3,2)$.
Tenemos $\overrightarrow{AB} = (1,2,0)-(0,2,-2) = (1,0,2)$ y $\overrightarrow{AC} = (2,3,2)-(0,2,-2) = (2,1,4)$

$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,0,2) \\ \overrightarrow{AC} = (2,1,4) \\ A(0,2,-2) \end{cases}$ $\pi = \begin{vmatrix} x & y-2 & z+2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2x+z+2 = 0 \Longrightarrow \pi : 2x-z-2 = 0$

$$d(O,\pi) = \frac{|0-0-2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\, u$$

Problema 4 (2,5 puntos) Considera el punto $P(1,1,1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{2}$.

a) (1 punto) Halla el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

b) (1,5 punto) Halla la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

$$r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2} \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,2) \\ P_r(1,2,3) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+2\lambda \end{array} \right. , \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

a) $\pi: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,2) \\ \overrightarrow{PP_r}=(1,2,3)-(1,1,1)=(0,1,2) \\ P(1,1,1) \end{array} \right.$ $\pi = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2x-2y+$ $z-1=0 \Longrightarrow \pi: 2x-2y+z-1=0$

b)
- ☛ Calculamos un plano $\pi_1 \perp r$ tal que $P \in \pi_1$: ($\overrightarrow{u_{\pi_1}}=\overrightarrow{u_r}$)
  $\pi_1: x+2y+2z+K=0 \stackrel{P\in\pi_1}{\Longrightarrow} 1+2+2+K=0 \Longrightarrow K=-5 \Longrightarrow \pi_1:$ $x+2y+2z-5=0$

- ☛ Calculamos el punto de corte de r con π_1
  $(1+\lambda)+2(2+2\lambda)+2(3+2\lambda)-5=0 \Longrightarrow 9\lambda+6=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{2}{3} \Longrightarrow$ $Q\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$

- ☛ Calculamos la recta s que pasa por los puntos P y Q, esta recta será perpendicular a r y pasará por P:
  $$s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)-(1,1,1)=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}(2,1,-2) \\ P(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow$$
  $$s: \left\{ \begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1-2\lambda \end{array} \right. , \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$