Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2026

Problema 1 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (m, 1, -2)$, $\overrightarrow{v} = (2, -m, 1)$ y $\overrightarrow{w} = (2, m, 1)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -2 \\ 2 & -m & 1 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = -2m(m+4) = 0 \Longrightarrow m = 0, \;\; m = -4$$

Si $m = 0$ o $m = -4$ los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

a) Calcular m para que los vectores $\overrightarrow{u} = (m, 4, m+5)$ y $\overrightarrow{v} = (2, m, -1)$ sean perpendiculares.

b) Encontrar un vector perpendicular a $\overrightarrow{u} = (2, -1, 5)$ y a $\overrightarrow{v} = (1, 0, 3)$ que tenga módulo 5.

c) Decidir si los vectores $\overrightarrow{u} = (1, -3, 1)$ y $\overrightarrow{v} = (4, 1, -1)$ son perpendiculares.

Solución:

a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2m + 4m - m - 5 = 0 \Longrightarrow m = 1$

b)

$$\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-3, -1, 1) \Longrightarrow |\overrightarrow{w}| = \sqrt{11}$$

$$\overrightarrow{t} = \frac{5}{\sqrt{11}}(-3, -1, 1) = \left(-\frac{15\sqrt{11}}{11}, -\frac{5\sqrt{11}}{11}, \frac{5\sqrt{11}}{11} \right)$$

c) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 4 - 3 - 1 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Problema 3 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (3, 0, -1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (0, 1, 1)$. Calcular:

a) Volumen de paralelepípedo que determinan.

b) Área de la base determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

c) Altura del paralelepípedo.

d) Volumen del tetraedro que determinan.

e) Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

f) Altura del tetraedro.

Solución:

a)

$$V_p = \left| \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = |-5| = 5\ u^3$$

b)

$$S_p = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(1, -8, 3)| = \sqrt{74}\ u^2$$

$$S_p = |\overrightarrow{v}| \cdot h_p \Longrightarrow h_p = \frac{\sqrt{74}}{3}\ u$$

c)

$$V_p = S_p \cdot H_p \Longrightarrow H_p = \frac{5\sqrt{74}}{74}\ u$$

d)

$$V_T = \frac{5}{6}\ u^3$$

e)

$$S_t = \frac{\sqrt{74}}{2}\ u^2,\ \ h_t = h_p = \frac{\sqrt{74}}{3}\ u$$

f)

$$H_t = H_p = \frac{5\sqrt{74}}{74}\ u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(-1, 0, 3)$, $B(2, 3, 1)$ y $C(4, 4, 5)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Encontrar el $4^{\underline{o}}$ vértice D.

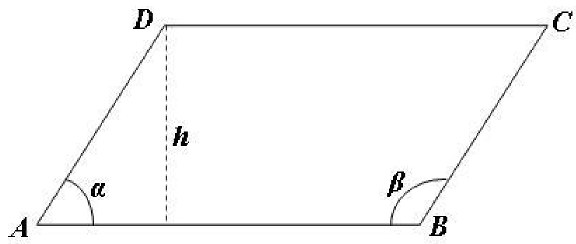
b) Calcular la longitud de sus lados.

c) Calcular sus ángulos y su centro.

d) Calcular el punto simétrico de A respecto de C.

e) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

Solución



a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1,0,3) + (2,1,4) = (1,1,7)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(3,3,-2)| = \sqrt{22}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2,1,4)| = \sqrt{21}$

c)
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \frac{1}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{21}} \Longrightarrow \alpha = 87^\circ 20'0'' \text{ y } \beta = 92^\circ 40'0''$$

El centro es $M\left(\frac{3}{2}, 2, 4\right)$

d) $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (9,8,7)$

e)
$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(5,4,2) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-1,0,3) + \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$$
$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{13}{3}\right)$$
$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{13}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = (4,4,5)$$