

## Examen de Matemáticas II (Selectividad - Modelo 2026)

### INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

**CALIFICACIÓN:** Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

**TIEMPO:** 90 minutos.

**Pregunta 1** (2 puntos) Un equipo de ingenieros está trabajando en un nuevo modelo de dron para tomar fotografías del estado del tráfico. Elegido un sistema de coordenadas, el dron tiene  $A(1, 0, 2)$  como punto de partida y un cierto tramo de autopista está contenido en el plano  $\pi : x + y + 2z + 1 = 0$ . Las fotografías se deben tomar perpendicularmente al plano  $\pi$ . Se toma el punto  $C(0, -3, 1)$  de  $\pi$  para calibrar el dron.

- a) (1 punto) Determine la distancia del dron en el punto de partida  $A$  al plano  $\pi$  y halle una ecuación del plano en el que el dron vuela manteniendo en todo momento la misma distancia al plano  $\pi$ . Este plano recibe el nombre de plano de vuelo.
- b) (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:
- a.1 El dron se mueve en línea recta en el plano de vuelo desde el punto de partida  $A$  al punto más cercano a  $C$ . Halle una ecuación de la recta que contiene la trayectoria lineal que recorre el dron para fotografiar  $C$ .
- a.2 La fotografía obtenida de  $C$  a esa distancia no tiene buena definición. Se decide acercar el dron desde el punto de partida  $A$  descendiendo perpendicularmente al plano  $\pi$  para situarse en  $A'$ , a la mitad de la distancia original. Calcule el ángulo formado por el plano  $\pi$  y la recta que pasa por  $C$  y  $A'$ .

**Solución:**

a)  $D(A, \pi) = \frac{|1 + 0 + 4 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \text{ u}$

$$\pi' \parallel \pi \implies \pi' : x + y + 2z + K = 0 \xrightarrow{A \in \pi'} 1 + 0 + 4 + K = 0 \implies K = -5 \implies \pi' : x + y + 2z - 5 = 0$$

b) a.1 Calculamos una recta  $r \perp \pi$  tal que  $C \in r$ :

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (1, 1, 2) \\ P_r = C(0, -3, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculamos el punto de corte de  $r$  con  $\pi'$ :

$$(\lambda) + (-3 + \lambda) + 2(1 + 2\lambda) - 5 = 0 \implies \lambda = 1 \implies C'(1, -2, 3)$$

La recta  $s$  buscada pasa por  $A$  y  $C'$ :

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \overrightarrow{AC'} = (1, -2, 3) - (1, 0, 2) = (0, -2, 1) \\ P_s = A(1, 0, 2) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2\mu \\ z = 2 + \mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

a.2 Calculamos una recta  $t \perp \pi$  tal que  $A \in t$ :

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (1, 1, 2) \\ P_t = A(1, 0, 2) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculamos el punto de corte de  $t$  con  $\pi$ :

$$(1 + \lambda) + (\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 1 = 0 \implies \lambda = -1 \implies A''(0, -1, 0)$$

$$\text{El punto } A' = \frac{A + A''}{2} = \frac{(1, 0, 2) + (0, -1, 0)}{2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

Calculamos la recta  $h$  que pasa por  $C$  y  $A'$ :

$$h : \begin{cases} \vec{u}_h = \vec{A'C} = (0, -3, 1) - \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2}(1, 5, 0) \implies \\ P_h = C(0, -3, 1) \end{cases}$$

$$h : \begin{cases} x = \beta \\ y = -3 + 5\beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

Calculamos el ángulo formado por  $h$  y  $\pi$ :

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{\vec{u}_h \cdot \vec{u}_\pi}{|\vec{u}_h| \cdot |\vec{u}_\pi|} = \frac{(1, 5, 0) \cdot (1, 1, 2)}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{156}} = \frac{\sqrt{39}}{13} \implies$$

$$\alpha = 28^\circ 42' 38''$$

**Pregunta 2** (2 puntos) Dada  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 1}$ , se pide:

a) (1 punto) Analizar la paridad y los extremos relativos de  $f(x)$ .

b) (1 punto) Hallar  $\int_{-1}^0 f(x) dx$ .

**Solución:**

a)  $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{|-x| + 1} = \frac{x^2 + 1}{|x| + 1} = f(x) \implies f$  es una función PAR, simétrica respecto al eje OY.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{-x + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 + 1}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \implies$$

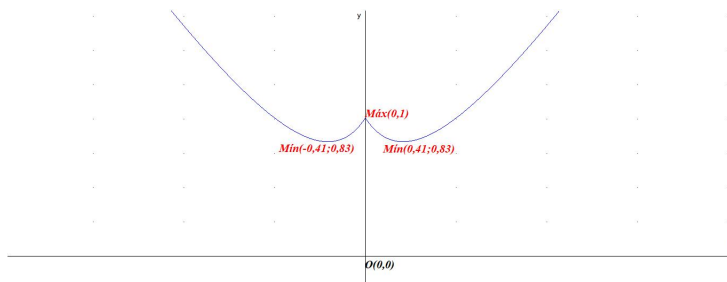
$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} = 0 \implies x = 1 - \sqrt{2}, x = 1 + \sqrt{2} \text{ no válida} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2} = 0 \implies x = -1 + \sqrt{2}, x = -1 - \sqrt{2} \text{ no válida} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

	$(-\infty, 1 - \sqrt{2})$	$(1 - \sqrt{2}, 0)$	$(0, -1 + \sqrt{2})$	$(-1 + \sqrt{2}, \infty)$
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo  $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (0, -1 + \sqrt{2})$  y creciente en el  $(1 - \sqrt{2}, 0) \cup (-1 + \sqrt{2}, \infty)$ .

La función tiene dos mínimos absolutos en  $(1 - \sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2}) \simeq (-0, 4142; 0, 8284)$  y en el  $(-1 + \sqrt{2}; -2 + 2\sqrt{2}) \simeq (0, 4142; 0, 8284)$ .

La función tiene un máximo relativo en  $(0, 1)$ .



$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 \frac{x^2 + 1}{-x + 1} dx = \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{x^2 + 1}{-x + 1} \right) : (-x + 1) = -x - 1 + \frac{2}{-x + 1} \\ \frac{-x^2 + x}{x + 1} \\ \frac{-x + 1}{2} \end{array} \right] = \\
 \int_{-1}^0 \left( -x - 1 - 2 \frac{-1}{-x + 1} \right) dx &= \left[ -\frac{x^2}{2} - x - 2 \ln |1 - x| \right]_{-1}^0 = 0 - \frac{1}{2} + 2 \ln 2 \simeq 0,8863
 \end{aligned}$$

**Pregunta 3** (2,5 puntos) Una envasadora de aceitunas comercializa bolsas con 12 aceitunas. La cosecha de este año ha sido atacada por el hongo *Sphaeropsis dalmatica* y una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad escudete. Se pide:

- (1 punto) Calcular la probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas con la enfermedad.
- (1 punto) Los controles sanitarios han fallado y se han distribuido 100 bolsas de aceitunas de esta cosecha. Calcular, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 60% de las bolsas distribuidas tenga alguna aceituna con escudete.

**Solución:**

a) Tenemos  $n = 12$ ,  $p = \frac{19}{20} = 0,95$  y  $q = \frac{1}{20} = 0,05 \implies B(12; 0,95)$

$$P(X = 12) = \binom{12}{12} \cdot 0,95^{12} \cdot 0,05^0 = 0,5404$$

b) Ahora tenemos  $n = 100$  y  $p = 1 - 0,5404 = 0,4596 \implies B(100; 0,4596)$

Como  $n = 100 > 30$ ,  $np = 45,96 > 30$  y  $nq = 54,04 > 5 \implies$

$$B(100; 0,4596) \stackrel{N(np; \sqrt{npq})}{\approx} N(45,96; 4,984)$$

$$P(Y \geq 0,6 \cdot 100) = P(Y \geq 60) = P\left(Z \geq \frac{59,5 - 45,96}{4,984}\right) =$$

$$P(Z \geq 2,72) = 1 - P(Z \leq 2,72) = 1 - 0,9967 = 0,0033$$

**Pregunta 4** (2 puntos) **Responda a uno de los dos apartados siguientes a) o b)**

a) (2 puntos) Sean  $a \in \mathbb{R}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Se pide:

a.1 (1 punto) Calcular, si existen, los valores de  $a$  tales que la matriz  $AA^t$  sea una matriz diagonal.

a.2 (1 punto) Calcular, si existen, los valores de  $a$  tales que  $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ .

b) (2 puntos) Sea el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + \lambda y + z = 7 \\ x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$ . Se pide:

b.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro real  $\lambda$ .

b.2 (1 punto) Resolver el sistema si  $\lambda = -1$ .

**Solución:**

a)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Se pide:

$$a.1 \quad AA^t = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2 + 4 & 2a^2 - 2 \\ 2a^2 - 2 & a^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Para que  $AA^t$  sea una matriz diagonal tiene que cumplirse  $2a^2 - 2 = 0 \implies a = \pm 1$ .

a.2  $(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2 \implies AB - BA = O \implies AB = BA$

$$AB = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 2 & 4a - 4 \\ a - 1 & 2a + 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \implies \begin{pmatrix} 2a + 2 & 4a - 4 \\ a - 1 & 2a + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2a + 2 = 4a \implies a = 1 \\ 4a - 4 = 0 \implies a = 1 \\ a - 1 = 0 \implies a = 1 \end{cases} \implies$$

$$a = 1$$

b)  $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + \lambda y + z = 7 \\ x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$ . Se pide:

$$b.1 \quad \bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & 1 & 7 \\ 1 & 2 & \lambda & 2 \end{array} \right) \implies |A| = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \implies \lambda = -1 \text{ y } \lambda = 4.$$

• Si  $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 4\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{número de incógnitas} \implies \text{sistema compatible determinado (solución única)}$

• Si  $\lambda = 4$ :

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 5F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array} \right) \implies \text{Sistema incompatible (no tiene solución)}$$

• Si  $\lambda = -1$ :

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies$$

Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

$$\text{b.2 } \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -5y + 3z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \mu \\ y = 9 - 3\mu \\ z = 16 - 5\mu \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

**Pregunta 5** (2 puntos) **Responda a uno de los dos apartados siguientes a) o b)**

a) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ a \sin x + 4 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2 \sin(2x) + b & \text{si } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

a.1 (1 punto) Halle los valores de  $a$  y  $b$  para que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Bolzano en  $[0, 2\pi]$ .

a.2 (1 punto) Justifique razonadamente que la función  $f(x)$  tiene una única raíz en el intervalo  $(0, 2\pi)$  y calcule dicha raíz.

b) Se considera la función  $\begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ . Se pide:

b.1 (1 punto) Determinar si  $f(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ .

b.2 (1 punto) Determinar si  $f(x)$  es derivable en el punto  $x = 0$  y, si existe, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x)$  para  $x = 0$ .

**Solución:**

a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ a \sin x + 4 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2 \sin(2x) + b & \text{si } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$

a.1 Para que se cumplan las hipótesis del Teorema de Bolzano en  $[0, 2\pi]$  la función tiene que ser continua en este intervalo.

Las tres ramas son continuas por ser composición de funciones continuas. Hay que imponer la continuidad en  $x = \frac{\pi}{2}$  y en  $x = \pi$ .

• Continuidad en  $x = \frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) = -4 & \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} f(x) = f(\pi/4) \\ \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} (a \sin x + 4) = a + 4 \\ f(\pi/4) = a + 4 \end{cases} \implies -4 = a + 4 \implies a = -8.$$

• Continuidad en  $x = \pi$ :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (a \sin x + 4) = 4 & \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = f(\pi) \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (2 \sin(2x) + b) = b \\ f(\pi) = b \end{cases} \implies b = 4.$$

•  $a = -8$  y  $b = 4$ .

Como  $f(0) = -\frac{7}{2}$  y  $f(2\pi) = b = 8$  cumple las hipótesis del teorema de Bolzano que afirma que  $\exists c \in (0, 2\pi) | f(c) = 0$

a.2 Tenemos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) = 0 \implies \cos x = 8 \text{ imposible} & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -8 \sin x + 4 = 0 \implies \sin x = \frac{1}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2 \sin(2x) + 4 \implies \sin(2x) = -2 \text{ imposible} & \text{si } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

Luego el único punto de corte posible es el que cumple:

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ y } x \in (\pi/2, \pi) \implies x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

b) Se considera la función  $\begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ . Se pide:

b.1 La función logaritmo es continua. Hay que analizar la continuidad en  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = 0 = f(0) \implies f \text{ continua en } x = 0 \implies f \text{ continua en } \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{b.2 } f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(h^2+1)}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h^2+1)}{h^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h}{h^2+1}}{2h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2+1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2+1} = 1 \end{aligned}$$

Luego la función es derivable en  $x = 0$ .

La pendiente de la recta tangente es  $m = f'(0) = 1$  y el punto de tangencia es  $(0, f(0)) = (0, 0)$

$$y - f(0) = m(x - 0) \implies y = x.$$