Examen de Matemáticas II (Selectividad - Modelo 2026)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Pregunta 1 (2 puntos) Un equipo de ingenieros está trabajando en un nuevo modelo de dron para tomar fotografías del estado del tráfico. Elegido un sistema de coordenadas, el dron tiene $A(1, 0, 2)$ como punto de partida y un cierto tramo de autopista está contenido en el plano $\pi : x+y+2z+1 = 0$. Las fotografías se deben tomar perpendicularmente al plano π. Se toma el punto $C(0, -3, 1)$ de π para calibrar el dron.

a) (1 punto) Determine la distancia del dron en el punto de partida A al plano π y halle una ecuación del plano en el que el dron vuela manteniendo en todo momento la misma distancia al plano π. Este plano recibe el nombre de plano de vuelo.

b) (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:

a.1 El dron se mueve en línea recta en el plano de vuelo desde el punto de partida A al punto más cercano a C. Halle una ecuación de la recta que contiene la trayectoria lineal que recorre el dron para fotografiar C.

a.2 La fotografía obtenida de C a esa distancia no tiene buena definición. Se decide acercar el dron desde el punto de partida A descendiendo perpendicularmente al plano π para situarse en A', a la mitad de la distancia original. Calcule el ángulo formado por el plano π y la recta que pasa por C y A'.

Pregunta 2 (2 puntos) Dada $f(x) = \dfrac{x^2+1}{|x|+1}$, se pide:

a) (1 punto) Analizar la paridad y los extremos relativos de $f(x)$.

b) (1 punto) Hallar $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Pregunta 3 (2,5 puntos) Una envasadora de aceitunas comercializa bolsas con 12 aceitunas. La cosecha de este año ha sido atacada por el hongo *Sphaeropsis dalmatica* y una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad escudete. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas con la enfermedad.

b) (1 punto) Los controles sanitarios han fallado y se han distribuido 100 bolsas de aceitunas de esta cosecha. Calcular, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 60 % de las bolsas distribuidas tenga alguna aceituna con escudete.

Pregunta 4 (2 puntos) **Responda a uno de los dos apartados siguientes a) o b)**

a) (2 puntos) Sean $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a.1 (1 punto) Calcular, si existen, los valores de a tales que la matriz AA^t sea una matriz diagonal.

a.2 (1 punto) Calcular, si existen, los valores de a tales que $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

b) (2 puntos) Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + \lambda y + z = 7 \\ x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$. Se pide:

b.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro real λ.

b.2 (1 punto) Resolver el sistema si $\lambda = -1$.

Pregunta 5 (2 puntos) **Responda a uno de los dos apartados siguientes a) o b)**

a) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ a \sin x + 4 & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2\sin(2x) + b & \text{si} \quad \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

a.1 (1 punto) Halle los valores de a y b para que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Bolzano en $[0, 2\pi]$.

a.2 (1 punto) Justifique razonadamente que la función $f(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $(0, 2\pi)$ y calcule dicha raíz.

b) Se considera la función $\begin{cases} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$. Se pide:

b.1 (1 punto) Determinar si $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

b.2 (1 punto) Determinar si $f(x)$ es derivable en el punto $x = 0$ y, si existe, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 0$.