

## Examen de Matemáticas II (Extraordinaria-Coincidente 2026)

### INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

**CALIFICACIÓN:** Cada bloque se calificará sobre 2 puntos.

**TIEMPO:** 90 minutos.

**Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):**

**Pregunta 1** (2 puntos) Un virus estomacal presenta como síntomas diarreas y fiebres en un 95 % de los infectados. En un momento de presión asistencial en la Comunidad de Madrid, 40 de cada mil habitantes están infectados por dicho virus. Por otro lado, un 0,5 % de la población no infectada por el virus presenta los mismos síntomas por otras causas.

- a) (1 punto) Una persona tiene los síntomas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté infectado por el virus estomacal?
- b) (1 punto) Dadas dos personas que tienen los síntomas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas tenga el virus?

#### Solución:

Sean  $S$  tiene síntomas,  $\bar{S}$  no tiene síntomas,  $I$  está infectado y  $\bar{I}$  no está infectado.

$P(S|I) = 0,95$  y  $P(I) = 0,04 \Rightarrow P(S \cap I) = P(S|I)P(I) = 0,95 \cdot 0,04 = 0,038$

$P(S|\bar{I}) = 0,005$  y  $P(\bar{I}) = 0,96 \Rightarrow P(S \cap \bar{I}) = P(S|\bar{I})P(\bar{I}) = 0,005 \cdot 0,96 = 0,0048$

|           |        |           |       |
|-----------|--------|-----------|-------|
|           | $S$    | $\bar{S}$ | Total |
| $I$       | 0,038  |           | 0,04  |
| $\bar{I}$ | 0,0048 |           |       |
| Total     |        |           | 1     |

 $\Rightarrow$ 

|           |        |           |       |
|-----------|--------|-----------|-------|
|           | $S$    | $\bar{S}$ | Total |
| $I$       | 0,038  | 0,002     | 0,04  |
| $\bar{I}$ | 0,0048 | 0,9552    | 0,96  |
| Total     | 0,0428 | 0,9572    | 1     |

a)  $P(I|S) = \frac{P(S \cap I)}{P(S)} = \frac{0,038}{0,0428} \simeq 0,8879$

b)  $P(\bar{I}|S) = 1 - P(I|S) \simeq 0,1121$  y la probabilidad de que ninguna de las dos personas estén infectadas es  $0,1121^2$ , luego la probabilidad alguno de los dos esté infectado es  $1 - 0,1121^2 \simeq 0,9874$

**Pregunta 2** (2 puntos) La potencia instantánea en el momento  $t$ ,  $P(t)$ , es la derivada de la energía producida hasta el momento  $t$ . Una instalación fotovoltaica doméstica en un día despejado genera

una potencia en kilowatios (kW) que se modeliza por la siguiente función con respecto a la hora del día  $t \in [0, 24]$ :

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ 3 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) & \text{si } 8 \leq t \leq 20 \\ 0 & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Determine cuándo esa potencia aumenta y cuándo disminuye. ¿Cuál es el momento del día en que la instalación entrega su potencia máxima?
- b) (1 punto) Halle la energía producida a lo largo del día en kilowatios hora (kWh).

**Solución:**

$$\text{a) } P'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < 8 \\ \frac{3\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) & \text{si } 8 < t < 20 \\ 0 & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{3\pi}{8} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{8}(t-12) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 8 \text{ irrelevante} \\ \frac{\pi}{8}(t-12) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 16 \\ \frac{\pi}{8}(t-12) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 24 \text{ no válida} \end{cases}$$

|         |             |               |
|---------|-------------|---------------|
|         | (8, 16)     | (16, 20)      |
| $P'(t)$ | +           | -             |
| $P(t)$  | creciente ↗ | decreciente ↘ |

De 0 a 8 horas no hay producción de energía e igualmente ocurre de 20 a 24 con potencia cero. De 8 a 16 horas la potencia es creciente y a partir de esa hora es decreciente hasta las 20 horas. La máxima potencia se produce a las 16 horas con  $P(16) = 6$  kWh.

$$\text{b) } \int_8^{20} \left[ 3 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) \right] dt = \int_8^{20} \left[ 3 + 3 \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\pi}{8} \sin\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) \right] dt =$$

$$3t - \frac{24}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) \Big|_8^{20} = \frac{24}{\pi} + 60 - 24 = \frac{24}{\pi} + 36 \simeq 43,6394 \text{ kWh}$$

**Pregunta 3** (2 puntos) Sea  $S$  el conjunto formado por todas las matrices reales  $2 \times 2$  triangulares superiores para las que el elemento que ocupa el lugar  $(2, 2)$  de la matriz es la suma de los elementos de su primera fila, es decir,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- a) (1 punto) Pruebe que si  $A$  y  $B$  son dos matrices cualesquiera del conjunto  $S$ ,  $AB$  está en  $S$ .
- b) (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:
- b.1. Determine para qué valores de  $a$  y  $b$  las matrices de  $S$  son invertibles. Pruebe que si una matriz de  $S$  tiene inversa, esta es también una matriz de  $S$ .
- b.2. Calcule todas las matrices  $A$  de  $S$  tales que  $A^2 = A$ .

**Solución:**

a) Sean  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c+d \end{pmatrix} \in S$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b(c+d) \\ 0 & (a+b)(c+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+bc+bd \\ 0 & ac+ad+bc+bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow a_{22} = a_{11} + a_{12} \Rightarrow AB \in S$$

b) b.1. Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a(a+b) = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = -a \Rightarrow$

Luego si  $a \neq 0$  y  $a \neq -b \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a(a+b)} \\ 0 & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{a} + \left(-\frac{b}{a(a+b)}\right) = \frac{a+b-b}{a(a+b)} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow A^{-1} \in S$$

b.2.  $A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(2a+b) \\ 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a^2 = a \Rightarrow a = 0 \vee a = 1 \\ b(2a+b) = b \Rightarrow b = 0 \vee b = 1-2a \\ (a+b)^2 = a+b \Rightarrow a = -b \vee b = 1-a \end{cases}$$

$$a^2 = a \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b^2 = b \Rightarrow b = 0, b = 1 \\ a = 1 \Rightarrow b(2+b) = b \Rightarrow b = 0, b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, b = 0 \\ a = 0, b = 1 \\ a = 1, b = 0 \\ a = 1, b = -1 \end{cases}$$

Tenemos  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Pregunta 4** (2 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes a o b:

a) Sean la recta  $r \equiv (x, y, z) = (1+t, 1+t, 1+t)$   $t \in \mathbb{R}$ , y el plano  $\pi \equiv x + y + z = 0$ .

a.1. (1 punto) Determine la posición relativa de la recta  $r$  y el plano  $\pi$ .

a.2. (1 punto) Halle los puntos de la recta  $r$  que se encuentran a distancia  $\sqrt{3}$  del plano  $\pi$ .

b) Sea la recta  $r \equiv (x, y, z) = (t, 1, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Se pide:

b.1. (1 punto) Hallar dos planos que se corten en la recta  $r$ , que formen entre sí un ángulo de  $90^\circ$  y uno de ellos pase por el punto  $(0, 0, 1)$ .

b.2. (1 punto) Justificar que todas las rectas contenidas en los dos planos obtenidos en el apartado anterior que no tienen puntos en común con la recta  $r$  son necesariamente paralelas entre sí.

**Solución:**

a) Tenemos  $r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ P_r(1, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases}$

a.1. Sustituyendo  $r$  en  $\pi$ :

$$(1+t) + (1+t) + (1+t) = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow \text{la recta } r \text{ y el plano } \pi \text{ se cortan en el punto } P(4, 4, 4).$$

a.2. Un punto genérico de la recta  $r$  puede ser  $P_r(1+t, 1+t, 1+t)$  cuya distancia al plano  $\pi$  es:

$$d(P_r, \pi) = \frac{|(1+t) + (1+t) + (1+t)|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|3+3t|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \implies |3+3t| = 3|1+t| = 3 \implies |1+t| = 1 \implies \begin{cases} 1+t = 1 \implies t = 0 \implies P_1(1, 1, 1) \\ 1+t = -1 \implies t = -2 \implies P_2(-1, -1, -1) \end{cases}$$

b) Sea  $r : (x, y, z) = (t, 1, t) \implies r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \implies r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$

b.1. Ponemos  $r$  como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{z}{1} \\ \frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} \end{cases} \implies \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

Calculamos un haz de planos que contenga a esta recta en su intersección:

$x - z + \lambda(y - 1) = 0$  y como  $(0, 0, 1)$  pertenece a uno de los planos que buscamos  $0 - 1 + \lambda(0 - 1) = 0 \implies -1 - \lambda = 0 \implies \lambda = -1$  y sustituyendo en el haz de planos tenemos  $\pi_1 : x - z - (y - 1) = 0 \implies \pi_1 : x - y - z + 1 = 0$ .

Para calcular el otro plano  $\pi_2 \perp \pi_1$  tenemos:

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_{\pi_1} = (1, -1, -1) \\ \vec{u}_r = (1, 0, 1) \\ P_r(0, 1, 0) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x - 2y + z + 2 = 0$$

$$\text{Luego } r : \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

b.2. Sea la recta  $s \in \pi_1 \implies (\vec{u}_s, P_s)$ :

$$\text{Rango} \left( \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_s \end{pmatrix} \right) = 2 \implies r \text{ y } s \text{ se cortan en un punto de } r \text{ lo que contradice el enunciado,}$$

luego  $\text{Rango} \left( \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_s \end{pmatrix} \right) = 1 \implies r \parallel s$  o son coincidentes. Como no pueden tener puntos comunes tiene que ser  $r \parallel s$ .

Análogo razonamiento para cualquier recta de  $\pi_2$  y concluimos que todas las rectas de  $\pi_1$  que no tienen puntos comunes con  $r$  son paralelas a las de  $\pi_2$  que no tienen puntos comunes con  $r$ .

**Pregunta 5** (2 puntos) **Responda a una de las dos preguntas siguientes a o b:**

a) (2 puntos) Sea la función  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - a}$ , donde  $a$  es un parámetro real.

a.1 (1 punto) Halle el valor de  $a$  para que la gráfica de  $f(x)$  presente una asíntota vertical en  $x = 2$ . Para dicho valor, estudie el resto de asíntotas de la gráfica.

a.2 (1 punto) Obtenga los valores de  $a$  para los cuales la gráfica de la función no presenta asíntotas verticales.

b) (2 puntos) Para la función  $f(x) = \sin(\pi|x^2 - 1|)$ , calcule

$$\int_0^2 x f(x) dx$$

**Solución:**

- a) a.1 Si hay una asíntota vertical en  $x = 2 \implies 6 - a = 0 \implies a = 6$  y comprobamos si es una asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{3x - 6} = \left[ \frac{3}{0^-} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{3x - 6} = \left[ \frac{3}{0^+} \right] = \infty$$

luego es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{3x - 6} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x - 6} = \infty$$

Asíntotas oblicuas:  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 6x} = \frac{1}{3}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{3x - 6} - \frac{x}{3} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{3x - 6} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

- a.2 Una asíntota vertical de  $f(x)$  sería  $3x - a = 0 \implies x = \frac{a}{3}$  pasamos al límite para comprobar si lo es:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{a}{3}} \frac{x^2 - 1}{3x - a} = \left[ \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2 - 1}{3\frac{a}{3} - a} \right] = \left[ \frac{a^2 - 9}{9(a - a)} \right] = \left[ \frac{a^2 - 9}{0} \right].$$

Si  $a^2 - 9 = 0 \implies a = \pm 3$  tendríamos que  $\lim_{x \rightarrow \frac{a}{3}} \frac{x^2 - 1}{3x - a} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{a}{3}} \frac{2x}{3} = \frac{2a}{9}$  y se trataría de una discontinuidad evitable (un agujero)

Para cualquier otro valor  $a \neq \pm 3 \implies \lim_{x \rightarrow \frac{a}{3}} \frac{x^2 - 1}{3x - a} = \left[ \frac{a^2 - 9}{0} \right] = \pm\infty$  y sí habría una asíntota vertical en  $x = \frac{a}{3}$ .

$$b) |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \implies f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x^2 - \pi) & \text{si } x < -1 \\ \sin(-\pi x^2 + \pi) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \sin(\pi x^2 - \pi) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 x f(x) dx &= \int_0^1 x \sin(-\pi x^2 + \pi) dx + \int_1^2 x \sin(\pi x^2 - \pi) dx = \\ \frac{-1}{2\pi} \int_0^1 (-2\pi x \sin(-\pi x^2 + \pi)) dx &+ \frac{1}{2\pi} \int_1^2 (2\pi x \sin(\pi x^2 - \pi)) dx = \\ \frac{-1}{2\pi} (-\cos(-\pi x^2 + \pi)) \Big|_0^1 &+ \frac{1}{2\pi} (-\cos(\pi x^2 - \pi)) \Big|_1^2 = \\ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$