

## Examen de Matemáticas II (Selectividad - Extraordinaria 2026)

### INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco**, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

**CALIFICACIÓN:** Cada bloque se calificará sobre 2 puntos.

**TIEMPO:** 90 minutos.

**Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):**

**Pregunta 1** (2 puntos) El 85 % de los alumnos de un instituto viven en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo y el resto en pueblos de alrededor. El 75 % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llega puntual a clase por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llega tarde a primera hora.

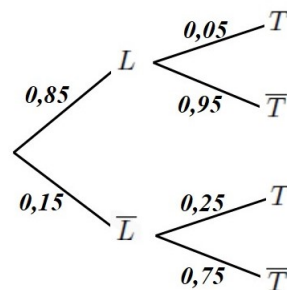
- a) (1 punto) Calcule el porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora.
- b) (1 punto) Se elige un alumno del centro al azar. Halle la probabilidad de que sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana.

**Solución:**

Sean  $L$  vive en la misma localidad del instituto,  $\bar{L}$  no vive en la misma localidad del instituto,  $T$  llega tarde al instituto y  $\bar{T}$  no llega tarde al instituto.

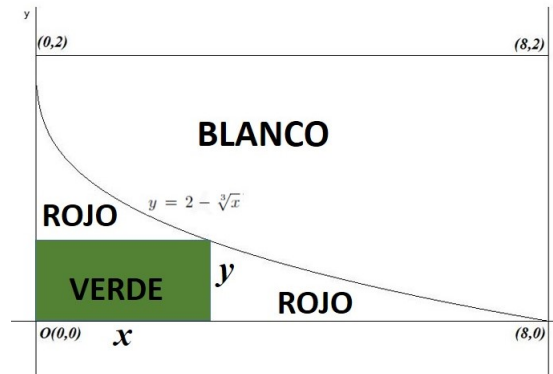
$$\text{a) } P(T) = P(T|L)P(L) + P(T|\bar{L})P(\bar{L}) = 0,05 \cdot 0,85 + 0,25 \cdot 0,15 = 0,08 = 8\%$$

$$\text{b) } P(\bar{L}|\bar{T}) = \frac{P(\bar{T}|\bar{L})P(\bar{L})}{P(\bar{T})} = \frac{0,75 \cdot 0,15}{1 - 0,08} = 0,1223$$



**Pregunta 2** (2 puntos) Un diseñador gráfico propone una bandera usando los colores verde, blanco y rojo. Para ello considera un rectángulo de base 8 y altura 2, toma como origen de coordenadas el extremo inferior izquierdo del rectángulo y los lados izquierdo e inferior están sobre los ejes coordenados  $OY$  y  $OX$ , respectivamente. En el rectángulo descrito traza la curva de ecuación  $y = 2 - \sqrt[3]{x}$  que va del vértice superior izquierdo del rectángulo al vértice inferior derecho. El diseñador quiere que la parte del rectángulo que queda por encima de la curva dada sea blanca. Para la parte que queda por debajo de la curva, toma un nuevo rectángulo con el vértice inferior izquierdo en el origen de coordenadas y el superior derecho en la curva. Ese rectángulo será verde y lo que queda será rojo. Calcule el área que ocupa cada color en esta bandera si el diseñador quiere que el área roja sea la menor posible.

**Solución:**



El área de blanco es:

$$S_b = \int_0^8 (2 - (2 - x^{1/3})) dx = \int_0^8 x^{1/3} dx = \left. \frac{3x^{4/3}}{4} \right|_0^8 = 12 \text{ u}^2$$

El área no blanca es  $8 \cdot 2 - 12 = 4 \text{ u}^2$

El área roja será  $S_R(x, y) = 4 - xy \implies S_R(x) = 4 - x(2 - x^{1/3}) = 4 - 2x + x^{4/3}$

$$S'_R(x) = -2 + \frac{4}{3}x^{1/3} = 0 \implies x = \frac{27}{8} \simeq 3,375 \text{ u}$$

$$S''_R(x) = \frac{4}{9}x^{-2/3} \implies S''_R(3,375) \simeq 0,1975 > 0 \implies x = \frac{27}{8} \text{ es un mínimo.}$$

El área roja ocupa  $S_R(3,375) = 2,3125 \text{ u}^2$  la verde  $S_V(3,375) = 1,6875 \text{ u}^2$  y la blanca  $S_B = 12 \text{ u}^2$ .

**Pregunta 3** (2 puntos) Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Resuelva la ecuación matricial:  $AX + X = B$ .

b) (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:

b.1. Calcule el determinante de la matriz  $(2C)^{100}$  aplicando propiedades de los determinantes.

b.2. Justifique si las matrices  $A$  y  $AB$  son invertibles.

**Solución:**

$$\text{a) } AX + X = B \implies (A + I)X = B \implies X = (A + I)^{-1}B =$$

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) b.1. } |(2C)^{100}| = |2C|^{100} = (2^3|C|)^{100} = 2^{300}|C|^{100} = 2^{300}1^{100} = 2^{300}$$

$$\text{b.2. } |A| = 1 \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$

$$\begin{matrix} A & \cdot & B \\ 3 \times 3 & & 3 \times 2 \end{matrix} = \begin{matrix} AB \\ 3 \times 2 \end{matrix} \implies \nexists (AB)^{-1}$$

**Pregunta 4** (2 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes a o b:

- a) Sean las rectas  $r_1 \equiv (x, y, z) = (1 + t, 1, 0)$  y  $r_2 \equiv (x, y, z) = (1 + s, s, 0)$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$ .
- a.1. (1 punto) Estudie la posición relativa de las rectas  $r_1$  y  $r_2$ .
- a.2. (1 punto) Halle una recta  $r_3$  tal que las intersecciones de  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$  formen un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa está contenida en  $r_2$  y tenga longitud  $\sqrt{2}$ .
- b) Se consideran el punto  $P(1, 2, 1)$  y el plano de ecuación  $2x - 2y + z = 1$ . Se traza un cubo con una cara en el plano y un vértice en el punto  $P$ .
- b.1. (1 punto) Determine la longitud del lado de dicho cubo y su volumen.
- b.2. (1 punto) Halle otro vértice del cubo.

**Solución:**

a) Tenemos  $r_1 : \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (1, 0, 0) \\ P_{r_1}(1, 1, 0) \end{cases}$  y  $r_2 : \begin{cases} \vec{u}_{r_2} = (1, 1, 0) \\ P_{r_2}(1, 0, 0) \end{cases}$

a.1.  $\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}} = (0, 1, 0)$  y  $[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \vec{u}_{r_1}, \vec{u}_{r_2}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies r_1$  y  $r_2$  no se cruzan, están en el mismo plano.

Como  $\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \implies r_1$  y  $r_2$  se cortan (no pueden ser ni paralelas ni coincidentes)

a.2. Calculamos el punto  $P$  de intersección de  $r_1$  y  $r_2$ :

$$\begin{cases} x = 1 + t = 1 + s \\ y = 1 = s \\ z = 0 = 0 \end{cases} \implies t = s = 1 \implies P(2, 1, 0)$$

Sea  $Q \in r_2 \implies Q(1 + s, s, 0)$  y  $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2} \implies |(1 + s, s, 0) - (2, 1, 0)| = |(s - 1, s - 1, 0)| = |s - 1|(1, 1, 0) = |s - 1|\sqrt{2} = \sqrt{2} \implies |s - 1| = 1 \implies \begin{cases} s - 1 = 1 \implies s = 2 \implies Q_1(3, 2, 0) \\ s - 1 = -1 \implies s = 0 \implies Q_2(1, 0, 0) \end{cases}$

Por otra parte sea  $\vec{u}_{r_3} = (a, b, c)$  un vector  $\vec{u}_{r_3} \perp \vec{u}_{r_1} \implies \vec{u}_{r_3} \cdot \vec{u}_{r_1} = (a, b, c) \cdot (1, 0, 0) = a = 0$  y por estar las tres rectas en el mismo plano  $c = 0 \implies \vec{u}_{r_3} = (0, b, 0) \implies \vec{u}_{r_3} = b(0, 1, 0)$  y podemos coger como vector director de la recta  $r_3$  al vector  $\vec{u}_{r_3} = (0, 1, 0)$ :

$$r_3 : \begin{cases} \vec{u}_{r_3} = (0, 1, 0) \\ P_{r_3} = Q_1(3, 2, 0) \end{cases} \implies r_3 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ o bien}$$

$$r_3 : \begin{cases} \vec{u}_{r_3} = (0, 1, 0) \\ P_{r_3} = Q_2(1, 0, 0) \end{cases} \implies r_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Sean  $P(1, 2, 1)$  y  $\pi : 2x - 2y + z = 1$

b.1. La longitud del lado del cubo es  $d(P, \pi) = \frac{|2 - 4 + 1 - 1|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{2}{3} u$

El volumen es  $V = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} u^3$

b.2. Calculamos el vértice  $Q$  intersección de una recta  $r \perp \pi$  que pase por  $P$  con el plano  $\pi$ :

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (2, -2, 1) \\ P_r = P(1, 2, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Esta recta corta al plano  $\pi$  en uno de los vértices del cubo:

$$2(1 + 2\lambda) - 2(2 - 2\lambda) + (1 + \lambda) = 1 \implies \lambda = \frac{2}{9} \implies Q\left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9}\right)$$

**Pregunta 5** (2 puntos) **Responda a una de las dos preguntas siguientes a o b:**

a) (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Halle el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos con sus correspondientes valores.

b) (2 puntos) Halle el valor real  $a$  tal que

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x - a) \sin(3x) dx = \frac{2\pi}{9}$$

**Solución:**

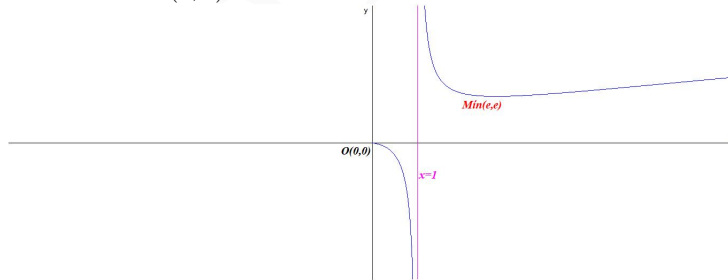
a) Al no existir logaritmos de números negativos y el denominador se anula en  $x = 1 \implies$

$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, \infty).$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \implies \ln x - 1 = 0 \implies x = e$$

|         | $(0, 1)$               | $(1, e)$               | $(e, \infty)$        |
|---------|------------------------|------------------------|----------------------|
| $f'(x)$ | -                      | -                      | +                    |
| $f(x)$  | decreciente $\searrow$ | decreciente $\searrow$ | creciente $\nearrow$ |

La función es decreciente en el intervalo  $(0, 1) \cup (1, e)$  y creciente en el  $(e, \infty)$  con un mínimo relativo en el  $(e, e)$ .



$$\begin{aligned} \text{b) } F(x) &= \int (x-a) \sin(3x) dx = \left[ \begin{array}{l} u = x - a \implies du = dx \\ dv = \sin(3x) dx \implies v = -\frac{1}{3} \cos(3x) \end{array} \right] = -\frac{(x-a) \cos(3x)}{3} + \\ &\frac{1}{3} \int \cos(3x) dx = -\frac{(x-a) \cos(3x)}{3} + \frac{1}{9} \sin(3x) + C = -\frac{3(x-a) \cos(3x) - \sin(3x)}{9} + C \\ &\int_0^{\frac{\pi}{3}} (x-a) \sin(3x) dx = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) = \frac{\pi - 3a}{9} - \frac{a}{3} = \frac{\pi - 6a}{9} \\ &\frac{\pi - 6a}{9} = \frac{2\pi}{9} \implies \pi - 6a = 2\pi \implies a = -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$