Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato CN
Diciembre 2025

Problema 1 (2 puntos) Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - ax + 2 - 2\cos x}{e^x - x\cos x - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Solución:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - ax + 2 - 2\cos x}{e^x - x\cos x - 1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - a + 2\sin x}{e^x - \cos x + x\sin x} \overset{a=1}{=} \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x + 2\cos x}{e^x + \sin x + \sin x + x\cos x} = \dfrac{2}{1} = 2$
Para que el límite sea finito tiene que ser $a = 1$ y el valor del límite es 2.

Problema 2 (2 puntos) Halla la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e - 2 - 2\ln 2)$ y $(1, 0)$, y verifica que $f''(x) = e^{x-1} - \dfrac{1}{x}$.
Solución:
$f'(x) = \displaystyle\int f''(x)\,dx = \int e^{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = e^{x-1} - \ln x + A$
$f(x) = \displaystyle\int f'(x)\,dx = \int e^{x-1}\,dx - \int \ln x\,dx + A\int dx = e^{x-1} + Ax - \int \ln x\,dx =$
$\left[\begin{array}{l} u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx \Longrightarrow v = x \end{array}\right] = e^{x-1} + Ax - x\ln x + \displaystyle\int dx = e^{x-1} + Ax - x\ln x + x + B$
$f(2) = e + 2A - 2\ln 2 + 2 + B = e - 2 - 2\ln 2 \Longrightarrow 2A + B = -4$
$f(1) = A + 2 + B = 0 \Longrightarrow A + B = -2$
Luego $A = -2$ y $B = 0$:

$$f(x) = e^{x-1} - 2x - x\ln x + x \Longrightarrow f(x) = e^{x-1} - x\ln x - x$$

Problema 3 (2 puntos) Calcula el valor de k para que $\displaystyle\int_1^3 e^{x-k}(x-2)\,dx = 2$.
Solución:
$F(x) = \displaystyle\int e^{x-k}(x-2)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x - 2 \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{x-k}dx \Longrightarrow v = e^{x-k} \end{array}\right] = e^{x-k}(x-2) - \int e^{x-k}\,dx =$
$e^{x-k}(x-2) - e^{x-k} = (x-3)e^{x-k} + C$
$\displaystyle\int_1^3 e^{x-k}(x-2)\,dx = F(3) - F(1) = 0 - (-2e^{1-k}) = 2 \Longrightarrow e^{1-k} = 1 \Longrightarrow 1 - k = 0 \Longrightarrow$
$k = 1$

Problema 4 (2 puntos)

a) Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 - \sin x^2}{1 - \cos x}$

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \cos^2 x \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

y el eje de abscisas.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin x^2}{1 - \cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - 2x\cos x^2}{\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - 2\cos x^2 + 4x^2 \sin x^2}{\cos x} = \dfrac{0}{1} = 0$

b) Buscamos puntos de corte en el intervalo $[0, \pi]$
$\cos^2 x \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = \pi$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$, luego tenemos dos recintos de integración $S_1 : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y $S_2 : \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

$F(x) = \displaystyle\int \cos^2 x \sin x\, dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \\ dx = -\dfrac{1}{\sin x} dt \end{array}\right] = -\int t^2 \sin x \frac{1}{\sin x} dt = -\int t^2\, dt =$
$-\dfrac{t^3}{3} = -\dfrac{\cos^3 x}{3}$

$S_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

En este caso la función está por encima del eje OX.

$S_2 = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin x\, dx = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

En este caso la función está por encima del eje OX.

$S = |S_1| + |S_2| = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3} = 0,6667\, u^2$

Problema 5 (2 puntos) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \ln(1 + x)}{x \sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \ln(1 + x)}{x \sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{\sin x + x\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x + \cos x - x \sin x} =$
$\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x\, e^{\sin x} - e^x}{2x} \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x\, e^{\sin x} + \cos^2 x\, e^{\sin x} - e^x}{2} = 0$