

Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato CN Diciembre 2025

Problema 1 (2 puntos) Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - ax + 2 - 2 \cos x}{e^x - x \cos x - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Solución:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - ax + 2 - 2 \cos x}{e^x - x \cos x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - a + 2 \sin x}{e^x - \cos x + x \sin x} \stackrel{a=1}{=} \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 2 \cos x}{e^x + \sin x + \sin x + x \cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

Para que el límite sea finito tiene que ser $a = 1$ y el valor del límite es 2.

Problema 2 (2 puntos) Halla la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e - 2 - 2 \ln 2)$ y $(1, 0)$, y verifica que $f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$.

Solución:
$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int e^{x-1} dx - \int \frac{1}{x} dx = e^{x-1} - \ln x + A$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int e^{x-1} dx - \int \ln x dx + A \int dx = e^{x-1} + Ax - \int \ln x dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] = e^{x-1} + Ax - x \ln x + \int dx = e^{x-1} + Ax - x \ln x + x + B$$

$$f(2) = e + 2A - 2 \ln 2 + 2 + B = e - 2 - 2 \ln 2 \implies 2A + B = -4$$

$$f(1) = A + 2 + B = 0 \implies A + B = -2$$

Luego $A = -2$ y $B = 0$:

$$f(x) = e^{x-1} - 2x - x \ln x + x \implies f(x) = e^{x-1} - x \ln x - x$$

Problema 3 (2 puntos) Calcula el valor de k para que $\int_1^3 e^{x-k}(x-2) dx = 2$.

Solución:
$$F(x) = \int e^{x-k}(x-2) dx = \left[\begin{array}{l} u = x - 2 \implies du = dx \\ dv = e^{x-k} dx \implies v = e^{x-k} \end{array} \right] = e^{x-k}(x-2) - \int e^{x-k} dx =$$

$$e^{x-k}(x-2) - e^{x-k} = (x-3)e^{x-k} + C$$

$$\int_1^3 e^{x-k}(x-2) dx = F(3) - F(1) = 0 - (-2e^{1-k}) = 2 \implies e^{1-k} = 1 \implies 1 - k = 0 \implies$$

$$k = 1$$

Problema 4 (2 puntos)

a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x^2}{1 - \cos x}$

b) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \cos^2 x \sin x, \quad x \in [0, \pi]$$

y el eje de abscisas.

Problema 5 (2 puntos) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$