Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Abril 2026

Problema 1 (2,5 puntos) Cada una de las opciones a y b.

a) (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \cos^4 x \sin x$

a.1 (1,25 puntos) Calcula una primitiva de f que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

a.2 (1,25 puntos) Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

b) (2,5 puntos) Dos drones están realizando un vuelo de forma que las alturas de cada uno de ellos viene dado por las funciones $h_1(t) = 36/t$ y $h_2(t) = t^3 + 5t$ de tiempo, con $t \in [1, 4]$.

b.1 (0,5 puntos) Calcula los instantes en los que los dos drones se encuentran a la misma altura.

b.2 (1 punto) Calcula los puntos de máxima altura de los dos.

b.3 (1 punto) Calcula el área acotada encerrada entre ambas curvas.

Solución:

a) a.1 $F(x) = \displaystyle\int \cos^4 x \sin x \, dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \\ dx = -\dfrac{1}{\sin x} dt \end{bmatrix} = \int t^4 \sin x \left(-\frac{1}{\sin x}\right) dt = -\int t^4 \, dt = -\frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + C = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow F(x) = -\dfrac{\cos^5 x}{5}$

a.2 Comprobamos si hay algún punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $[0, \pi]$:

$f(x) = 0 \Longrightarrow \cos^4 x \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$, luego hay dos recintos $S_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $S_2 : \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ con sus áreas correspondientes.

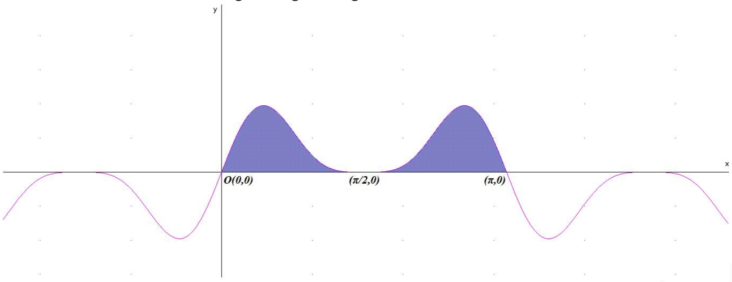
El área total será $S = |S_1| + |S_2|$

$S_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x) \, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \frac{1}{5}$

$S_2 = \displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} f(x) \, dx = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{5}$

Las integrales son positivas por estar la función por encima del eje de abscisas y esta función debe ser tangente a ese eje en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4\ u^2$



b) b.1 $h_1(t) = h_2(t) \Longrightarrow \frac{36}{t} = t^3 + 5t \Longrightarrow t^4 + 5t^2 - 36 = 0 \Longrightarrow t = \pm 2$ La solución negativa no pertenece al intervalo, luego la solución es $t = 2$.

b.2
- Si $h_1(t) = \frac{36}{t} \Longrightarrow h_1'(t) = -\frac{36}{t^2} < 0\ \forall t \in [1,4] \Longrightarrow h_1$ es decreciente en todo el intervalo y el valor máximo se produce con $t = 1 \Longrightarrow h_1(1) = 36$
- Si $h_2(t) = t^3 + 5t \Longrightarrow h_2'(t) = 3t^2 + 5 > 0\ \forall t \in [1,4] \Longrightarrow h_2$ es creciente en todo el intervalo y el valor máximo se produce con $t = 4 \Longrightarrow h_2(4) = 84$

b.3 Las curvas se cortan en $t = 2$ y tendremos dos recintos de integración $S_1 : [1,2]$ y $S_2 : [2,4]$. El área total será: $S = |S_1| + |S_2|$.

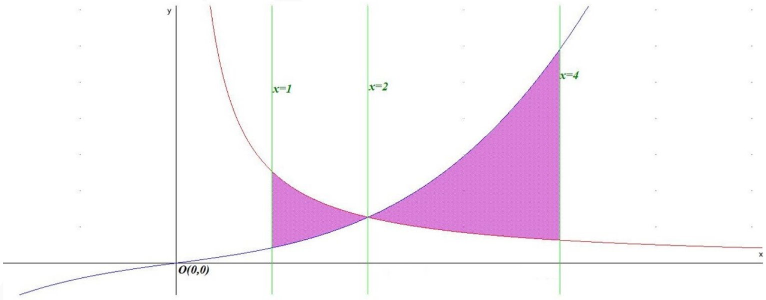
$S_1 = \int_1^2 \left(\frac{36}{t} - t^3 - 5t\right) dt = 36 \ln |t| - \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}\Big]_1^2 = 36 \ln 2 - \frac{45}{4}$

La integral es positiva al estar la función h_1 por encima de la h_2.

$S_2 = \int_2^4 \left(\frac{36}{t} - t^3 - 5t\right) dt = 36 \ln |t| - \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}\Big]_2^4 = 36 \ln 2 - 90$

La integral es negativa al estar la función h_1 por debajo de la h_2.

$S = |S_1| + |S_2| = 36 \ln 2 - \frac{45}{4} + 90 - 36 \ln 2 = \frac{315}{4} \simeq 78,75\ u^2$



Problema 2 (2,5 puntos) Cada una de las opciones a y b.

a) (2,5 puntos) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si} \quad 0 \le x < 4 \\ 3 - (x-5)^2 & \text{si} \quad 4 \le x \end{cases}$

a.1 (1 punto) Estudia si la función es continua en su dominio.

a.2 (1 punto) Estudia los intervalos de crecimiento de la función. Estudia si la función tiene extremos relativos. Haz un esbozo de la gráfica de la función.

a.3 (0,5 puntos) Suponiendo que la función representa el número de millones de bacterias de un tipo que existen en una determinada muestra, en cada instante x, ¿se llegaría a alcanzar en algún instante el valor 5 millones?

b) (2,5 puntos) De dos funciones continuas se sabe que $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ y $g(1) = -1$ y $g'(1) = 2$

Se construye la función $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Se pide

b.1 (1,25 punto) Calcular $h(1)$ y $h'(1)$

b.2 (1,25 punto) Sabiendo que f tiene un máximo en $x = 3$ y que $k(x) = (x-2)^2 f(x)$ tiene un mínimo en ese mismo punto, calcular $f(3)$.

Solución:

a) a.1 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Las dos ramas son polinomios y, por tanto, continuas. Hay que estudiar la continuidad en $x = 4$:

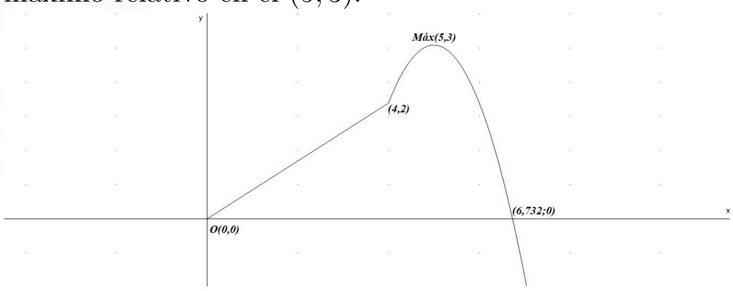
$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{x}{2} = 2 \\ \displaystyle\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4}[3-(x-5)^2] = 2 \\ f(4) = 2 \end{array}\right. \xrightarrow{\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4) = 2}$$

f es continua en $x = 4$ y, por tanto, en $[0, \infty)$.

a.2 $$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1}{2} > 0 & \text{si} & 0 \le x < 4 \\ -2(x-5) = 0 \Longrightarrow x = 5 & \text{si} & 4 < x \end{array}\right.$$

	$(0,4)$	$(4,5)$	$(5,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	crece $\nearrow$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(5, \infty)$ y creciente en el $(0, 5)$ con un máximo relativo en el $(5, 3)$.



a.3 El máximo relativo se obtiene en $x = 5$ y, como se observa en la gráfica, es un máximo absoluto con 3 millones de bacterias, luego nunca se llegaría a valores por encima de esta cantidad. En conclusión no se puede alcanzar los 5 millones de bacterias.

b) Tenemos: $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$ y $g(1) = -1$ y $g'(1) = 2$

b.1 $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow h(1) = \dfrac{f(1)}{g(1)} = \dfrac{1}{-1} = -1$
$h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \Longrightarrow h'(1) = \dfrac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{(g(1))^2} = \dfrac{2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2}{(-1)^2} = -4$

b.2 Tenemos $f'(3) = 0$ y $f''(3) < 0$, por otra parte:
$k'(x) = 2(x-2)f(x) + (x-2)^2 f'(x) = (x-2)[2f(x) + (x-2)f'(x)]$ y $k'(3) = 0$ y $k''(3) > 0$.
$k'(3) = 2f(3) + f'(3) = 2f(3) + 0 = 0 \Longrightarrow f(3) = 0$
¿Pero se cumple la condición de mínimo en $x = 3 \Longrightarrow k''(3) > 0$?
$k''(x) = [2f(x) + (x-2)f'(x)] + (x-2)[2f'(x) + f'(x) + (x-2)f''(x)] \Longrightarrow$
$k''(3) = 2f(3) + f'(3) + 3f'(3) + f''(3) = 0 + 0 + 0 + f''(3) < 0 \Longrightarrow x = 3$ es un máximo relativo de $k(x)$, en contradicción con el enunciado del problema que nos asegura un mínimo en ese punto. No hay solución posible para ese enunciado, si lo habría si se retoca esta hipótesis asegurando un máximo o bien un extremo relativo.
La condición de que un punto anule la primera derivada es una condición necesaria de extremo relativo pero no suficiente. Hay multitud de funciones con tangente horizontal en un punto en él que la función pasa de crecer a seguir creciendo o de decrecer a decrecer. Por ejemplo: $f(x) = x^3$. Luego siempre hay que comprobar la hipótesis de extremo y el tipo de extremo que es.