

**Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)**  
**Abril 2026**

---

**Problema 1** (2,5 puntos) Cada una de las opciones a y b.

a) (2,5 puntos)

a.I (0,5 puntos) Dada la función  $f(x) = 2 + \sin x \cos x$ , con  $x \in \mathbb{R}$  calcula  $f'(x)$ .

a.II (1 punto) Obtén  $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 + \sin x \cos x} dx$ .

a.III (1 punto) Calcula (si existe), en función del valor de  $k \in \mathbb{Z}$ , el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{(x^2 - 1)^{2k}}$$

b) (2,5 puntos) Sea  $g(x) = x - \sin x$  con  $x \in \mathbb{R}$

b.I (0,5 puntos) Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $g(x)$ .

b.II (0,5 puntos) Obtén los máximos y mínimos absolutos de  $g(x)$  en el intervalo  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ .

b.III (1,5 puntos) Calcula el área delimitada por la gráfica de la función  $h(x) = xg(x)$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = \frac{\pi}{2}$  y  $x = \pi$ .

**Solución:**

a) (2,5 puntos)

a.I  $f'(x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$ .

a.II Como el numerador es la derivada del denominador según hemos visto en el apartado anterior:  $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 + \sin x \cos x} dx = \ln |2 + \sin x \cos x| + C$ .

a.III Sea  $f(x) = \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{(x^2 - 1)^{2k}}$

• Si  $k \geq 1$  y  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \left[ \begin{array}{l} k \geq 1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right] =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{(x^2 - 1)^{2k}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^{2k}(x+1)^{2k}} = \frac{1}{2^{2k-2} \cdot 0^+} = +\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)^{2k-1}(x+1)^{2k-2}} = \frac{1}{2^{2k-2} \cdot 0^+} = +\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{(x^2 - 1)^{2k}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^{2k}(x+1)^{2k}} = \frac{1}{2^{2k-2} \cdot 0^+} = -\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)^{2k-1}(x+1)^{2k-2}} = \frac{1}{2^{2k-2} \cdot 0^+} = -\infty. \end{array} \right\} \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)}$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \forall k \in [1, \infty) \subset \mathbb{Z}$$

☛ Si  $k = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{(x^2 - 1)^0} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + x^3 - x^2 - x) = 0$$

☛ Si  $k \leq -1$  y  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \left[ \begin{array}{l} k \leq -1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} [(x^4 + x^3 - x^2 - x)(x^2 - 1)^{-2k}] = 0$$

☛ En conclusión: Si  $k \leq 0 \implies \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \forall k \in (-\infty, 0] \subset \mathbb{Z}$  y si

$$k > 0 \implies \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm \infty \quad \forall k \in [1, \infty) \subset \mathbb{Z}$$

b) b.I  $g'(x) = 1 - \cos x = 0 \implies \cos x = 1 \implies x = 0 \pm k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ .

Por otra parte  $\cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies g'(x) \geq 0 \implies g(x)$  es creciente en  $\mathbb{R}$ .

b.II Tenemos  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2} \simeq 0,5708$  y  $g(\pi) = \pi - \sin \pi = \pi - 0 = 3,1416$

Como la función es creciente el mínimo absoluto se encuentra en  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi - 2}{2}\right)$  y el máximo absoluto en  $(\pi, \pi)$ .

$$\text{b.III } H(x) = \int (x^2 - x \sin x) dx = \frac{x^3}{3} - \int x \sin x dx = \left[ \begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \sin x dx \implies v = -\cos x \end{array} \right] = \frac{x^3}{3} + x \cos x - \int \cos x dx = \frac{x^3}{3} + x \cos x - \sin x + C$$

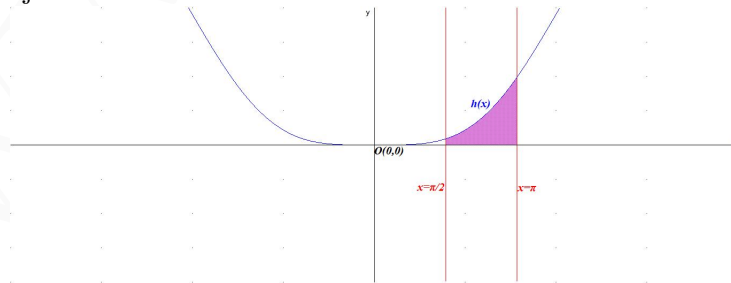
Analizamos si la función  $h$  corta al eje de abscisas en el interior del intervalo  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$$h(x) = x(1 - \sin x) = 0 \implies x = 0 \notin \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ y } 1 - \sin x = 0 \implies \sin x = 1 \implies x = \frac{\pi}{2} \notin \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Luego el recinto de integración es el propio intervalo.

$$S = \left| \int_{\pi/2}^{\pi} (x^2 - x \sin x) dx \right| = \left| H(\pi) - H\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| \frac{7\pi^3}{24} - \pi + 1 \right| \simeq 6,9019$$

El resultado de la integral es positivo por estar la función  $h$  por encima del eje de abscisas.



**Problema 2** (2,5 puntos) Cada una de las opciones a y b.

a) (2,5 puntos) Se considera la función  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$

a.1 (1 punto) Calcula el dominio de la función  $f$  y sus asíntotas.

a.2 (1 punto) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a.3 (0,5 puntos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de  $f$ .

b) (2,5 puntos) Se dispone de una placa circular de 4 metros de radio, de la que se pretende obtener una pieza rectangular de área máxima. Sabiendo que el centro del rectángulo estará en el centro de la placa, calcule la longitud de los lados del rectángulo y el área del mismo. (Ayuda:

la ecuación de la circunferencia de centro en el punto  $(a, b)$  radio  $r$  es:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ).

**Solución:**

a) a.1  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

Asíntotas:

• Verticales:

•  $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} = \left[ \frac{2}{0^-} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} = \left[ \frac{2}{0^+} \right] = +\infty$$

•  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} = \left[ \frac{2}{0^+} \right] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} = \left[ \frac{2}{0^-} \right] = -\infty$$

• Horizontales:  $y = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{1 - x^2} = -1$$

• Oblicuas: No hay por haber horizontales.

a.2  $f'(x) = \frac{4x}{(1 - x^2)^2} = 0 \implies x = 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	-	-	+	+
$f(x)$	decrece ↘	decrece ↘	crece ↗	crece ↗

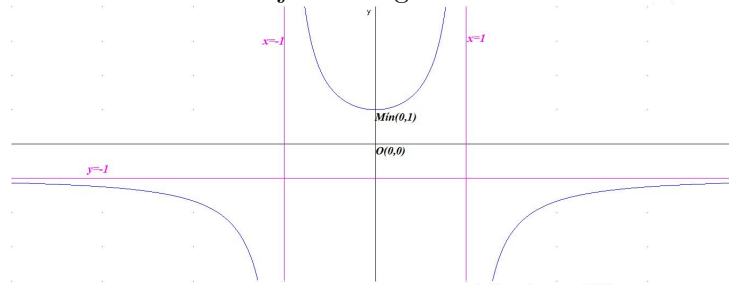
La función es decreciente en el intervalo  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$  y creciente en el  $(0, 1) \cup (1, \infty)$  con un mínimo relativo en el punto  $(0, 1)$ .

$$f''(x) = \frac{4(3x^2 + 1)}{(1 - x^2)^3} \neq 0 \implies \text{no hay puntos de inflexión.}$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

La función es convexa  $\frown$  en el intervalo  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  y cóncava  $\smile$  en el  $(-1, 1)$

a.3 Con estos datos dibujamos la gráfica:



b) Tenemos:

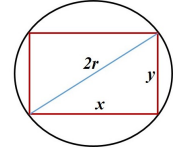
$$8^2 = x^2 + y^2 \implies y = \sqrt{64 - x^2}$$

$$S(x, y) = xy \implies S(x) = x\sqrt{64 - x^2} \implies$$

$$S'(x) = \sqrt{64 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{64 - x^2}} = \frac{-2x^2 + 64}{\sqrt{64 - x^2}} = 0 \implies -2x^2 + 64 =$$

$$0 \implies x = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}, \text{ la solución negativa es irrelevante.}$$

	$(0, 4\sqrt{2})$	$(4\sqrt{2}, \infty)$
$S'(x)$	+	-
$S(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$



La función tiene un máximo relativo en  $x = 4\sqrt{2}$  m con un área de  $S(4\sqrt{2}) = 32 \text{ m}^2$  y con  $y = 4\sqrt{2}$  m.