# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
**Abril 2026**

---

**Problema 1** (2,5 puntos) Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.
**Solución:**

- $x + y = 1 \Longrightarrow y = 1 - x$
- $P(x, y) = y\sqrt{x} \Longrightarrow P(x) = (1 - x)\sqrt{x}$
- $P'(x) = \dfrac{1 - 3x}{2\sqrt{x}} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

| | $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ | $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ |
|---|---|---|
| $P'(x)$ | $+$ | $-$ |
| $P(x)$ | creciente $\nearrow$ | decreciente $\searrow$ |

$P(x)$ crece en el intervalo $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$ y decrece en el $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ con un máximo en $x = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow y = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

**Problema 2** (2,5 puntos) Sea la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + \dfrac{\ln x}{x^2}$

a) (1 punto) Calcula $a$ para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de $f$.

b) (1,5 puntos) Para $a = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f$. Estudia y halla los extremos relativos de $f$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

**Solución:**

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(a + \frac{\ln x}{x^2}\right) = a + \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} a + \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{2x} = a + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} =$ $a + 0 = 1 \Longrightarrow a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \Longrightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Longrightarrow x = e^{1/2}$

| | $(0, e^{1/2})$ | $(e^{1/2}, \infty)$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | creciente $\nearrow$ | decreciente $\searrow$ |

La función es creciente en el intervalo $(0, e^{1/2})$ y decreciente en el $(e^{1/2}, \infty)$ con un máximo relativo en el punto $\left(e^{1/2}, \dfrac{1}{2e}\right)$

**Problema 3** (2,5 puntos) Halla la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e-2-2\ln 2)$ y $(1,0)$, y verifica que $f''(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$.

**Solución:**

$f'(x)=\displaystyle\int f''(x)\,dx=\int e^{x-1}\,dx-\int\frac{1}{x}\,dx=e^{x-1}-\ln x+A$

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,dx=\int e^{x-1}\,dx-\int \ln x\,dx+A\int dx=e^{x-1}+Ax-\int \ln x\,dx=$

$\left[\begin{array}{l} u=\ln x\Longrightarrow du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=dx\Longrightarrow v=x\end{array}\right]=e^{x-1}+Ax-x\ln x+\displaystyle\int dx=e^{x-1}+Ax-x\ln x+x+B$

$f(2)=e+2A-2\ln 2+2+B=e-2-2\ln 2\Longrightarrow 2A+B=-4$

$f(1)=A+2+B=0\Longrightarrow A+B=-2$

Luego $A=-2$ y $B=0$:

$$f(x)=e^{x-1}-2x-x\ln x+x\Longrightarrow f(x)=e^{x-1}-x\ln x-x$$

**Problema 4** (2,5 puntos) Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-1)e^x$

a) (1,5 puntos) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de inflexión.

b) (1 punto) Estudia y calcula las asíntotas de la función.

**Solución:**

a) $f'(x)=xe^x$ y $f''(x)=(x+1)e^x=0\Longrightarrow x=-1$.
$f'''(x)=(x+2)e^x\Longrightarrow f'''(-1)=e^{-1}\neq 0\Longrightarrow x=-1$ es un punto de inflexión.
Sea $a=-1\Longrightarrow b=f(a)=f(-1)=-2e^{-1}=-\dfrac{2}{e}$, $m_T=f'(-1)=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}\xrightarrow{y-b=m_T(x-a)} y+\dfrac{2}{e}=-\dfrac{1}{e}(x+1)\Longrightarrow y=-\dfrac{1}{e}x-\dfrac{3}{e}$ ecuación de la tangente.
$m_N=-\dfrac{1}{m_T}=e\xrightarrow{y-b=m_N(x-a)} y+\dfrac{2}{e}=e(x+1)\Longrightarrow y=ex+\dfrac{e^2-2}{e}$ ecuación de la normal.

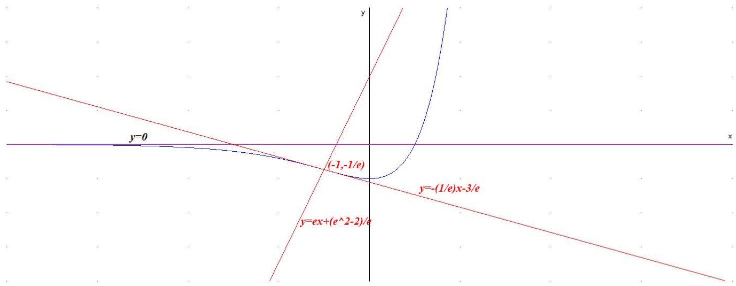
b)
- ☛ Verticales: no hay. ($\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$)
- ☛ Horizontal: $y=0$ cuando $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x\overset{x=-t}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{-t-1}{e^t}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{e^t}=\frac{-1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}(x-1)e^x=+\infty$$

- ☛ Oblicuas: $y=mx+n$
  Si $x\to-\infty$ no hay asíntota oblicua por haber horizontal.
  Si $x\to+\infty$ tampoco hay:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)e^x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x}{1}=\infty$$


y
x
y=0
(-1,-1/e)
y=-(1/e)x-3/e
y=ex+(e^2-2)/e