Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Ordinaria-Coincidente 2025)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 Responda los dos apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

Problema 1 (2,5 puntos) Un taller de carpintería especializado en muebles de comedor fabrica sillas y mesas. Para ampliar el negocio la dueña se está planteando fabricar otros muebles, como estanterías, pero esta ampliación aún no se ha efectuado y antes de considerarlo quiere utilizar sus recursos de la mejor manera posible.

a) (1,5 puntos) Se sabe que cada silla necesita 1 hora de trabajo especializado y cada mesa 4 horas de trabajo especializado. El taller solo tiene dos trabajadores especializados, que pueden dedicar un máximo de 24 horas semanales entre los dos a este tipo de trabajo. Además, por cada mesa hay que fabricar al menos 2 sillas, y entre sillas y mesas no se pueden fabricar cada semana más de 15 unidades. Si por cada silla obtiene un beneficio neto de 40 euros y por cada mesa de 100 euros, ¿cuántas sillas y mesas debe fabricar a la semana para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el beneficio semanal obtenido?

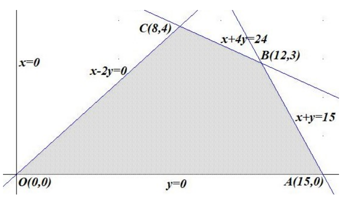
b) (1 punto) Supongamos que además de sillas y mesas decide fabricar estanterías. Ahora se plantea nuevas condiciones: entre los tres productos quiere fabricar exactamente 100 a la semana; por cada mesa debe fabricar exactamente 4 sillas; y los trabajadores le piden que 5 veces el número de mesas más el número de estanterías sea de exactamente 90 unidades. ¿Podría decirle a la dueña del taller, de forma justificada, si es posible fabricar en una semana un número de sillas, mesas y estanterías que cumpla los requerimientos anteriores?

Solución:

a) Sea x el número de sillas e y el número de mesas fabricadas.

- La región factible S es:

$$\begin{cases} x+4y\le 24\\ 2y\le x\\ x+y\le 15\\ x,y\ge 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+4y\le 24\\ x-2y\ge 0\\ x+y\le 15\\ x,y\ge 0\end{cases}$$



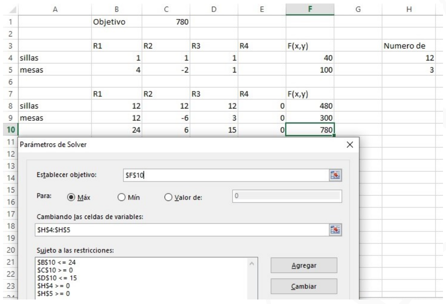
Los vértices son: $O(0,0)$, $A(15,0)$, $B(12,3)$ y $C(8,4)$

La función objetivo: $f(x,y)=40x+100y$

$$\begin{cases} f(0,0)=0 \\ f(15,0)=600 \\ f(12,3)=780 \Longleftarrow \text{Máximo} \\ f(8,4)=720 \end{cases}$$

Deberá fabricar 12 sillas y 3 mesas con un beneficio máximo de 780€

Solución por solver



b) Tenemos z número de estanterías:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 4y=x \\ 5y+z=90 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=100 \\ x-4y=0 \\ 5y+z=90 \end{cases}$$

Analizamos por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 90 \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -5 & -1 & -100 \\ 0 & 5 & 1 & 90 \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{bmatrix}=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -5 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible (no tiene solución)}$$

No es posible fabricar una cantidad de sillas, mesas y estanterías cumpliendo los requisitos del problema.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**

Problema 2 (2,5 puntos)

a) Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^2-x-a}{2}, \quad a\in\mathbb{R}$$

1. (1 punto) (1 punto) Calcule el valor del parámetro a para que $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx=\frac{5}{12}$
2. (1 punto) ¿Es $f(x)$ continua en su dominio para cualquier valor de $a\in\mathbb{R}$? Para $a=1$ escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$.
3. (0,5 puntos) Calcule el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{5x^3}$.

b) Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$$

1. (1,25 puntos) Determine el dominio y las asíntotas de la función.
2. (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿La función $f(x)$ alcanza un máximo en el punto de abscisa $x=0$? Justifique la respuesta.

Solución:

a) 1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2-x-a}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-ax\right)\Big]_2^3 = \frac{23-6a}{12} = \frac{5}{12} \Longrightarrow a=3$

2. $\forall a \in \mathbb{R}$ la función es un polinomio, luego $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$.
Para $a=1 \Longrightarrow f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{2}$ y tenemos $x=2 \Longrightarrow b=f(2)=\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ es el punto de tangencia.
$f'(x)=\dfrac{2x-1}{2} \Longrightarrow m=\dfrac{3}{2} \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}(x-2) \Longrightarrow y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{2}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-a}{10x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{10x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{10x}=\frac{1}{\infty}=0$

b) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

1. $\text{Dom}(f)=R-\{1\}$, el denominador se anula en $x=1$.
Asíntotas:

- Verticales: en $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty;\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty$$

- Horizontales: no hay, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=-\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$
- Oblicuas: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^3-2x^2+x}=1$$

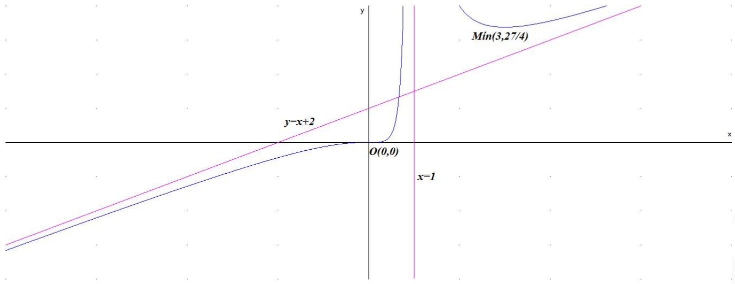
$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-2x+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2-x}{x^2-2x+1}\right)=2 \Longrightarrow y=x+2$$

2. $f'(x)=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0 \Longrightarrow x=0$ y $x=3$.

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$, y decreciente en el intervalo $(1,3)$, tiene un mínimo relativo en el punto $\left(3,\dfrac{27}{4}\right)$.
La función en $x=0$ pasa de crecer a crecer y no es un extremo relativo.



EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.
En cierta provincia española se sabe que la altura de las estudiantes de segundo de Bachillerato se puede aproximar por una distribución normal de media μ centímetros y desviación típica $\sigma = 10$ centímetros.

Problema 3 a) 1. (1,25 puntos) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 chicas de segundo de Bachillerato de la provincia y la altura media resulta ser de 165 centímetros. Obtenga un intervalo de confianza para la altura media de las estudiantes de segundo de Bachillerato de la provincia con un nivel de confianza del 97 %.

2. (1,25 puntos) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido al estimar la media μ con un nivel de confianza del 95 % no sea mayor de 1 centímetro?

b) 1. (1,25 puntos) Se toma una muestra aleatoria de chicas de segundo de Bachillerato de la provincia y se obtiene su altura media. Calculado el correspondiente intervalo de confianza para μ, este resulta $(168,825; 171,175)$ a un nivel de confianza del 90 %. ¿Cuál ha sido en este caso el tamaño muestral elegido?

2. (1,25 puntos) Supuesto que el verdadero valor del parámetro es $\mu = 168$ centímetros, calcule la probabilidad de que elegida al azar una chica de segundo de Bachillerato de la provincia mida entre 165 y 170 centímetros (ambos incluidos).

Solución:

$$N(\mu; 10)$$

a) 1. $n = 100$, $\overline{X} = 165$ y $NC = 97\,\%$:
$0,97 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,03 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,015$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,015 = 0,985 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,17$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17\dfrac{10}{\sqrt{100}} = 2,17$
$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (165 - 2,17; 165 + 2,17) = (162,83; 167,17)$

2. $NC = 0,95$:
$0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,96\dfrac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge 19,6^2 = 384,16 \Longrightarrow n = 385$

b) 1. $IC = (168,825; 171,175) \Longrightarrow \overline{X} = \dfrac{168,825 + 171,175}{2} = 170$ y $E = \dfrac{171,175 - 168,825}{2} = 1,175$

$NC = 90\,\%$:
$0,90 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$
$E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1,175 = 1,645\dfrac{10}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\dfrac{16,45}{1,175}\right)^2 = 196 \Longrightarrow n = 196$

2. $\mu = 168 \Longrightarrow N(168, 10)$.
$P(165 \le X \le 170) = P\left(\dfrac{165-168}{10} \le Z \le \dfrac{170-168}{10}\right) = P(-0,3 \le Z \le 0,2) = P(Z \le 0,2) - P(Z \le -0,3) = P(Z \le 0,2) - (1 - P(Z \le 0,3)) = 0,5793 - (1 - 0,6179) = 0,1972$

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.

Problema 4 (2,5 puntos)

a) De los 400 estudiantes de segundo de Bachillerato de un instituto a 150 les gusta jugar al fútbol, a 200 les gusta jugar al voleibol y a 100 les gusta jugar a ambos deportes. Elegido un estudiante al azar:

1. (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no le guste jugar a ninguno de los dos deportes?
2. (1 punto) Calcule la probabilidad de que le guste jugar solo a uno de los dos deportes.
3. (0,75 puntos) Sabiendo que no le gusta jugar al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste jugar al voleibol?

b) Los clientes potenciales de un comercio local, *Mitienda*, vienen de alguno de los municipios $M1$, $M2$ o $M3$. En $M1$ el $20\,\%$ de la población compra en *Mitienda*, siendo estos porcentajes del $10\,\%$ en $M2$ y del $8\,\%$ en $M3$. Además se sabe que el $50\,\%$ de la población vive en $M1$, el $30\,\%$ en $M2$ y el $20\,\%$ en $M3$.

1. (1,25 puntos) Se elige al azar un habitante de uno de los tres municipios. Calcule la probabilidad de que compre en *Mitienda*.
2. (1,25 puntos) Se elige al azar un individuo que ha comprado en *Mitienda*. Obtenga la probabilidad de que sea de los municipios $M2$ o $M3$.

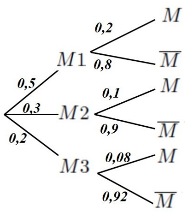
Solución:

a) Sean F les gusta el futbol y V les gusta el voleibol. Tenemos: $P(F) = \dfrac{150}{400} = 0,375$, $P(V) = \dfrac{200}{400} = 0,5$ y $P(F \cap V) = \dfrac{100}{400} = 0,25$

1. $P(\overline{F} \cap \overline{V}) = P(\overline{F \cup V}) = 1 - P(F \cup V) = 1 - (P(F) + P(V) - P(F \cap V)) = 1 - (0,375 + 0,5 - 0,25) = 0,375$
2. $P(\overline{F} \cap V) + P(F \cap \overline{V}) = P(V) - P(F \cap V) + P(F) - P(F \cap V) = 0,5 - 0,25 + 0,375 - 0,25 = 0,375$
3. $P(V|\overline{F}) = \dfrac{P(\overline{F} \cap V)}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(V) - P(F \cap V)}{P(\overline{F})} = \dfrac{0,5 - 0,25}{0,625} = 0,4$

b) Sean M compra en *Mitienda*, $\overline{M}$ no compra en *Mitienda*, $M1$ municipio $M1$, $M2$ municipio $M2$ y $M3$ municipio $M3$.

1. $P(M) = P(M|M1)P(M1) + P(M|M2)PM2) + P(M|M2)P(M2) =$
$0,2 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,08 \cdot 0,2 = 0,146$



2. $P(M2 \cup M3|M) = \dfrac{P(M|M2 \cup M3)P(M2 \cup M3)}{P(M)} =$
$\dfrac{P(M|M2)PM2 + P(M|M2)P(M2)}{P(M)} =$
$\dfrac{0,1 \cdot 0,3 + 0,08 \cdot 0,2}{0,146} = 0,3151$