Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Ordinaria 2025)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos.

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad.

Problema 1 El dueño de una frutería quiere alquilar una cámara frigorífica para la campaña de sandías del verano. Entre las diferentes cámaras que puede alquilar cercanas a su frutería, la que más le convence es una que tiene capacidad para guardar 2700 kilos de sandía que es, según sus datos de años anteriores, la cantidad de kilos que vende cualquier semana de la campaña. Las sandías que vende son de tres variedades: sandía verde rayada, sandía negra sin pepitas y sandía negra con pepitas. La sandía rayada es la menos apreciada por su clientela, por ello decide ponerle el precio más bajo y la venderá a 1,25 euros el kilo. Las sandías negras son las más demandadas entre su clientela, pero entre estas dos variedades es más fácil vender la variedad sin pepitas. Por esta razón, determina que el precio de la sandía negra sin pepitas sea de 2,75 euros el kilo y el precio con pepitas de 2,25 euros el kilo.
El dueño de la frutería quiere que, en cualquier circunstancia, el número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas.

a) (1,25 puntos) El frutero considera que para poder pagar el alquiler y obtener beneficio, debe recaudar de la venta 5400 euros cualquier semana de la campaña. Si se venden todas las sandías almacenadas para la semana, ¿cuántos kilos debería vender de cada variedad para recaudar exactamente ese importe?

b) (1,25 puntos) Con la idea de simplificar el etiquetado, el frutero necesita saber si es posible poner el mismo precio a todas las variedades de sandías y seguir recaudando 5400 euros a la semana vendiendo los 2700 kilos. Si fuera posible, ¿cuál sería el precio de venta del kilo de sandía?, ¿cuál sería la cantidad de kilos de cada variedad que debería vender?. Justifique si dichas cantidades serían únicas.

Solución:
Sean x los kg de sandía rayada, y los de sandía negra sin pepitas y z los de sandía negra con pepitas.

a) Tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z=2700 \\ 1,25x+2,75y+2,25z=5400 \\ z=\dfrac{x+y}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z=2700 \\ 5x+11y+9z=21600 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x=1125 \text{ kg de sandía rayada} \\ y=900 \text{ kg de sandía negra sin pepitas} \\ z=675 \text{ kg de sandía negra con pepitas} \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2700\\5&11&9&21600\\1&1&-3&0\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2-5F_1\\F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2700\\0&6&4&8100\\0&0&-4&-2700\end{array}\right)\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}-4z=-2700\Longrightarrow z=675\\6y+2700=8100\Longrightarrow y=900\\x+900+675=2700\Longrightarrow x=1125\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=1125\\y=900\\z=675\end{cases}$$

b) Si el precio de venta es k € y el sistema quedaría:

$$\begin{cases}x+y+z=2700\\x+y-3z=0\\kx+ky+kz=5400\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x+y+z=2700\\x+y-3z=0\\x+y+z=\dfrac{5400}{k}\end{cases}$$

Resolvemos por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2700\\1&1&-3&0\\1&1&1&\dfrac{5400}{k}\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c}F_1\\F_2-F_1\\F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2700\\0&0&-4&-2700\\0&0&0&\dfrac{5400}{k}-2700\end{array}\right)\Longrightarrow$$

El sistema sólo tiene solución en el caso de que $\dfrac{5400}{k}-2700=0\Longrightarrow k=2$ y sería compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Con $k=2$ tenemos:

$$\begin{cases}x+y+z=2700\\-4z=-2700\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=2025-\lambda\\y=\lambda\\z=675\end{cases}$$

Cuando el precio de venta es de 2€/kg tiene que comprar 675 kg de sandías con pepita y 2025 kg de las otras dos variedades.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**

Problema 2 (2,5 puntos)

a) Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si} \quad x\le 0\\ \dfrac{x+a}{x+1} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

1. (1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x=0$.
2. (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

b) Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión: $f(x)=e^x(-x^2+3)$

1. (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y clasifique, si procede, sus extremos relativos.
2. (1,25 puntos) Halle el valor de la integral definida

$$\int_1^2\frac{f(x)}{xe^x}\,dx$$

Solución:

a) 1. Continuidad en $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+a}{x+1} = a \\ f(0) = -1 \end{array}\right. \xrightarrow{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)} a = -1$$

2. En la rama $x \le 0$ tenemos:

- Verticales: no hay, el único valor que anula el denominador es $x = 1$ y no está en la rama.
- Horizontales: no hay, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty$
- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^2+1-x^2+x}{x-1}\right) =$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1+x}{x-1}\right) = 1 \Longrightarrow y = x + 1$$

En la rama $x > 0$ tenemos:

- Verticales: no hay, el único valor que anula el denominador es $x = -1$ y no está en la rama.
- Horizontales: $y = 1$, $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+a}{x+1} = 1$
- Oblicuas: No hay por haber horizontal.

b) 1. $f'(x) = e^x(-x^2 - 2x + 3) = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 1$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-3, 1)$, y decreciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$, tiene un mínimo relativo en el punto $\left(-3, -\dfrac{6}{e^3}\right)$ y un máximo relativo en el punto $(1, 2e)$.

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x}\,dx = \int_1^2 \frac{e^x(-x^2+3)}{xe^x}\,dx = \int_1^2 \left(-x + \frac{3}{x}\right) dx = -\frac{x^2}{2} + 3\ln|x|\Big]_1^2 =$
$-\dfrac{3}{2} + 3\ln 2 \simeq 0,5794$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.

www.musat.net

Problema 3 Para poder participar en el concurso “Mejor Jabón Artesano del año” es necesario pasar un control de calidad muy exigente.

a) Un maestro jabonero sabe que el 90 % de sus pastillas de jabón hechas a mano pasarían sin problemas este control de calidad.

1. (1 punto) La empresa organizadora del concurso elegirá en el taller de cada participante una muestra aleatoria simple de pastillas de jabón para obtener una estimación de la proporción de ellas que superan el control de calidad. Suponiendo cierta la creencia del maestro jabonero sobre la calidad de sus pastillas, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de pastillas de jabón que la empresa organizadora debe tomar en el taller de este artesano para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el margen de error en la estimación sea inferior al 5 %.
2. (1,5 puntos) Si finalmente la organización decide seleccionar una muestra aleatoria simple de 140 pastillas de jabón de este artesano, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 120 pastillas de jabón superen el control de calidad.

b) El peso de las pastillas de jabón de este artesano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ gramos y desviación típica 30 gramos.

1. (1,25 puntos) La empresa organizadora del concurso seleccionó 140 pastillas de jabón de este artesano y obtuvo que el peso total fue de 17500 gramos. Obtenga un intervalo de confianza del 99 % para estimar el peso medio μ de las pastillas de jabón de este artesano.
2. (1,25 puntos) Si el verdadero valor de μ fuera igual a 100 gramos, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 64 pastillas de jabón de una muestra aleatoria simple fuera superior a 110 gramos?

Solución:

a) $\hat{p} = 0,9$ y $\hat{q} = 1 - 0,9 = 0,1 \Longrightarrow B(n; 0,9)$

1. $NC = 0,95$:
$0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$
$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \Longrightarrow 0,05 = 1,96\sqrt{\dfrac{0,9 \cdot 0,1}{n}} \Longrightarrow n \ge \left(\dfrac{1,96}{0,05}\right)^2 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 138,29 \Longrightarrow$
$n = 139$
2. Tenemos $n = 140 \ge 20$, $np = 126 > 5$ y $nq = 14 > 5$ luego:

$$B(140; 0,9) \overset{N(np,\sqrt{npq}}{\approx} N(126; 3,55)$$

$$P(X \ge 120) = P\left(Z \ge \frac{119,5 - 126}{3,55}\right) = P(Z \ge -1,83) = P(Z \le 1,83) = 0,9664$$

b) $N(\mu, 30)$

1. $n = 140$, $\overline{X} = \dfrac{17500}{140} = 125$ y $NC = 0,99$:
   $0,99 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,01 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$
   $P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,575$
   $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\dfrac{30}{\sqrt{140}} = 6,529$
   $IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (125 - 6,529; 125 + 6,529) = (118,471; 131,529)$
2. $\mu = 100$, $n = 64 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(100, \dfrac{30}{\sqrt{64}}\right) = N(100; 3,75)$:
   $P(\overline{X} \geq 110) = P\left(Z \geq \dfrac{110 - 100}{3,75}\right) = P(Z \geq 2,67) = 1 - P(Z \leq 2,67) = 1 - 0,9962 = 0,0038$

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas siguientes: **a) o b)**.

Problema 4 (2,5 puntos)

a) En un concesionario el 50 % de sus ventas son de automóviles microhíbridos, el 35 % híbridos y el resto eléctricos enchufables. El acabado más alto de gama se vende en el 80 % de los eléctricos enchufables, el 60 % de los híbridos y el 45 % de los microhíbridos. Se selecciona una operación de venta al azar.

   1. (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el coche vendido en esa operación no tenga el acabado más alto de la gama.
   2. (1,25 puntos) Si el coche correspondiente a la operación de venta seleccionada tiene el acabado más alto de la gama, determine la probabilidad de que sea eléctrico enchufable.

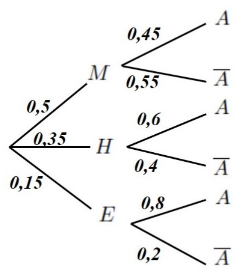
b) De tres sucesos A, B y C se sabe que A y C son sucesos disjuntos, A y B son independientes y se tienen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,2$ y $P(B \cap C) = 0,05$

   1. (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B.
   2. (1 punto) (1 punto) Calcule $P(\overline{B} \cup \overline{C})$.
   3. (0,5 puntos) ¿Pueden ser independientes los sucesos A y C?.

Solución:

a) Sean M automóviles microhíbridos, H híbridos, E eléctricos enchufables, A gama alta y $\overline{A}$ no gama alta.

   1. $P(\overline{A}) = P(\overline{A}|M)P(M) + P(\overline{A}|H)P(H) + P(\overline{A}|E)P(E) = 0,5 \cdot 0,55 + 0,35 \cdot 0,4 + 0,15 \cdot 0,2 = 0,445$
   2. $P(E|A) = \dfrac{P(A|E)P(E)}{P(A)} = \dfrac{0,15 \cdot 0,8}{1 - 0,445} = 0,2162$



b) Tenemos: $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,2$ y $P(B \cap C) = 0,05$.

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,25 + 0,2 - 0,25 \cdot 0,2 = 0,4$
2. $P(\overline{B} \cup \overline{C}) = P(\overline{B \cap C}) = 1 - P(B \cap C) = 1 - 0,05 = 0,95$
3. Tenemos que $P(A \cap C) = P(\emptyset) = 0$ por ser A y C disjuntos. Para ver si son independientes tenemos $P(A) \cdot P(C) = 0,25P(C)$. Como $P(B \cap C) = 0,05 \neq 0 \Longrightarrow P(C) \neq 0 \Longrightarrow P(A)P(C) \neq 0 \Longrightarrow A$ y C no son independientes.

www.musat.net