

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Diciembre 2024

Problema 1 (4 puntos) Considera los puntos $P(1, 0, 1)$ y $Q(3, -2, 1)$

- a) (2 punto) Calcula el plano perpendicular al segmento PQ que pasa por su punto medio.
- b) (2 puntos) Calcula el plano paralelo a la recta $r \equiv 1 - x = \frac{y - 2}{3} = z + 1$ que pasa por P y Q .

Solución:

- a) El plano π que buscamos es un plano mediador, es decir, el conjunto de puntos $H(x, y, z)$ tales que $d(PH) = d(QH) \implies |\overrightarrow{PH}| = |\overrightarrow{QH}| \implies \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2} \implies \pi : x - y = 3$

- b) Tenemos $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-1, 3, 1) \\ P_r(1, 2, -1) \end{cases} \quad y$

$$\overrightarrow{QP} = (3, -2, 1) - (1, 0, 1) = (2, -2, 0) = 2(1, -1, 0)$$

El plano π' que buscamos está definido por:

$$\pi' : \begin{cases} \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QP} = (1, -1, 0) \\ \vec{u}_r = (-1, 3, 1) \\ P(1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -x - y + 2z - 1 = 0 \implies$$

$$\pi' : x + y - 2z + 1 = 0$$

Problema 2 (3 puntos) Considera los puntos $A(1, 1, 2)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(1, -1, 2)$.

- a) (1,5 puntos) Determina el área del triángulo de vértices A , B y C .
- b) (1,5 puntos) Calcula D para que los puntos A , B , C y D sean los vértices consecutivos de un paralelogramo.

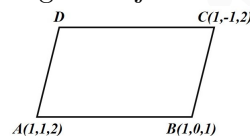
Solución:

- a) Sean $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1) - (1, 1, 2) = (0, -1, -1)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, -1, 2) - (1, 1, 2) = (0, -2, 0)$

$$S_t = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(-2, 0, 0)| = 1 \text{ u}^2$$

- b) los vértices consecutivos están representados en la figura adjunta.

$$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (1, 1, 2) + (0, -1, 1) = (1, 0, 3)$$



Problema 3 (3 puntos) Dados los puntos $P_1(-2, 1, 1)$, $P_2(0, a, -2)$, $P_3(-1, 1, -1)$ y $P_4(1, 3, -3)$, se pide:

- a) (1,5 puntos) Calcula los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro con vértices P_1 , P_2 , P_3 y P_4 tenga volumen $1/3$.
- b) (1,5 puntos) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los cuatro puntos sean coplanarios.

Solución:

- a) Sean $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, a, -2) - (-2, 1, 1) = (2, a-1, -3)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (-1, 1, -1) - (-2, 1, 1) = (1, 0, -2)$ y $\overrightarrow{P_1P_4} = (1, 3, -3) - (-2, 1, 1) = (3, 2, -4)$

$$V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}] \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & a-1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |2(2-a)| = \frac{1}{3} |2-a| = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$|2-a| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 2-a=1 \Rightarrow a=1 \\ 2-a=-1 \Rightarrow a=3 \end{cases}$$

- b) Los cuatro puntos son coplanarios si $[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}] = 0 \Rightarrow 2(2-a) = 0 \Rightarrow a = 2$