Examen de Matemáticas II
(Selectividad - Ordinaria - Coincidente 2025)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2,5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1 (2,5 puntos) Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x - y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - z = 9 \\ 5x - 3y + \lambda z = 11 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Decida en función de los valores del parámetro real λ en qué casos el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) (1 punto) Resuelva el sistema en el caso $\lambda = 2$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & \lambda & 11 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 8 - 2\lambda^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 2$

- ☛ Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{\pm 2\} \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
- ☛ $\lambda = -2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & -2 & 11 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + 3F_1 \\ 2F_3 + 5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 24 \\ 0 & -11 & 11 & 32 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 7F_3 - 11F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 7 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -40 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema incompatible (no tiene solución)
- ☛ $\lambda = 2$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 9 \\ 5 & -3 & 2 & 11 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 - 3F_1 \\ 2F_3 - 5F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -11 & 12 \\ 0 & -1 & -11 & 12 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $\lambda = 2$: $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 3z = 2 \\ -y - 11z = 12 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -5 - 7t \\ y = -12 - 11t \\ z = t \end{array}\right. \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Pregunta 2 (2,5 puntos) Una matriz cuadrada se dice estocástica si todos sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada columna de la matriz es igual a 1.

a) (1,5 puntos) Consideremos la matriz estocástica $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. Calcule todas las matrices diagonales, $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$, tales que DA sea una matriz estocástica.

b) (1 punto) Sea B una matriz estocástica de orden 3. ¿Existe alguna matriz diagonal D, distinta de la identidad, de tal forma que BD sea estocástica?

Solución:

a) $DA = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 & 0 & x/2 \\ y/3 & y/2 & y/4 \\ z/3 & z/2 & z/4 \end{pmatrix}$

Como DA tiene que ser estocástica:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Luego $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) Sea $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz estocástica y $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$:

$BD = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_{11} & ya_{12} & za_{13} \\ xa_{21} & ya_{22} & za_{23} \\ xa_{31} & ya_{32} & za_{33} \end{pmatrix}$ que si es estocástica se tiene que cumplir:

$$\begin{cases} xa_{11} + xa_{21} + xa_{31} = 1 \\ ya_{12} + ya_{22} + ya_{32} = 1 \\ za_{13} + za_{23} + za_{33} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(a_{11} + a_{21} + a_{31}) = 1 \\ y(a_{12} + a_{22} + a_{32}) = 1 \\ z(a_{31} + a_{32} + a_{33}) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Luego $D = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y no hay otra.

Bloque 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3 (2,5 puntos) Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar su dominio y estudiar su paridad.

b) (1 punto) Calcular los límites: $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x)$

c) (0,75 puntos) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 1$.

Solución:

a) Resolvemos la inecuación $x^2 + 3x \geq 0$:

$x^2 + 3x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = -3 \Longrightarrow$

$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, \infty)$
$+$	$-$	$+$

$\Longrightarrow$

$\text{Dom}(f) = (-\infty, -3] \cup [0, \infty)$

La paridad:

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 3(-x)} = \sqrt{x^2 - 3x} \neq \pm f(x)$ la función ni es par ni es impar.

b)
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t^2-3t}}{-t} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right] = \lim_{t\to\infty} -\sqrt{\frac{t^2-3t}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} -\sqrt{1 - \frac{3}{t}} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3x} + x) \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to\infty} (\sqrt{t^2-3t} - t) = [\infty - \infty] = \lim_{t\to\infty} \frac{(\sqrt{t^2-3t} - t)(\sqrt{t^2-3t} + t)}{\sqrt{t^2-3t} + t} =$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2 - 3t - t^2}{\sqrt{t^2-3t} + t} = \lim_{t\to\infty} \frac{-3t}{\sqrt{t^2-3t} + t} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{-3t}{\sqrt{t^2} + t} = \lim_{t\to\infty} \frac{-3t}{2t} = -\frac{3}{2}$$

c) Tenemos $a = 1$ y $b = f(a) = f(1) = 2 \Longrightarrow (1, 2)$ es el punto de tangencia.

$$f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} \Longrightarrow m = f'(a) = f'(1) = \frac{5}{4} \xrightarrow{y-b=m(x-a)} y - 2 = \frac{5}{4}(x-1) \Longrightarrow$$

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$$

Pregunta 4 (2,5 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 9}.$$

Calcule la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(0) = \ln 3$.

Solución:

$$F(x) = \int \frac{x^3 - x^2}{x^2+9}\,dx = \left[\begin{array}{l} (\ \ x^3 - x^2) : (x^2 + 9) = x - 1 + \dfrac{-9x+9}{x^2+9} \\ \underline{-x^3 \qquad -9x} \\ \qquad -x^2 - 9x \\ \qquad \underline{\ \ x^2 \qquad +9} \\ \qquad\qquad -9x + 9 \end{array}\right] = \int \left(x - 1 + \frac{-9x+9}{x^2+9}\right) dx =$$

$$\frac{x^2}{2} - x + 9\int \left(\frac{-x}{x^2+9} + \frac{1}{x^2+9}\right) dx = \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2}\int \frac{2x}{x^2+9} + 9\int \frac{1}{x^2+9}\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2}\ln|x^2+9| + 9\int \frac{1}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)}\,dx = \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2}\ln|x^2+9| + \int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = \frac{x}{3} \\ dt = \frac{dx}{3} \\ dx = 3dt \end{array}\right] =$$

$$\frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2}\ln|x^2+9| + \int \frac{1}{t^2+1}\,3dt = \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2}\ln|x^2+9| + 3\arctan t + C =$$

www.musat.net

$$\frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2}\ln|x^2+9| + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$F(0) = -9\ln 3 + C = \ln 3 \Longrightarrow C = 10\ln 3$. Luego:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{9}{2}\ln|x^2+9| + 3\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + 10\ln 3$$

Bloque 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 5 (2,5 puntos) Sara está revisando una estructura de vigas metálicas. Para ello, utiliza un programa de cálculo estructural que lleva integrado un módulo de diseño asistido por ordenador. El programa trata las vigas como segmentos entre dos puntos. Cuando dos segmentos comparten algún punto, se fijan simulando una soldadura. Para introducir un segmento basta indicar las coordenadas de los extremos del mismo.
Sara se ha dado cuenta de que una parte de la estructura no es lo suficientemente resistente. En concreto, ha encontrado dos vigas, no soldadas entre sí, que deben reforzarse, por lo que decide añadir otra viga que, soldándola a ambas, solucione el problema. Las dos vigas en cuestión son V_1 cuyos extremos son los puntos $A(1,2,-3)$ y $B(1,6,1)$ y V_2 cuyos extremos son los puntos $C(-2,-8,7)$ y $D(10,-4,7)$.

a) (1,25 puntos) Como primera solución, Sara decide que la viga añadida esté soldada a los puntos medios de V_1 y V_2. Calcule las coordenadas de los extremos de la viga añadida y los cosenos de los ángulos que forman dicha viga con V_1 y con V_2.

b) (1.25 puntos) Haciendo un análisis más detallado, Sara encuentra que la resistencia es mayor si la viga añadida es perpendicular tanto a V_1 como a V_2. Calcule, en el caso de que sea posible, las coordenadas de los extremos de la viga añadida si se adopta esta solución.

Solución:

a) Sea P_1 el punto medio de V_1, es decir, $P_1 = \dfrac{A+B}{2} = \dfrac{(2,8,-2)}{2} = (1,4,-1) \Longrightarrow P_1(1,4,-1)$
Sea P_2 el punto medio de V_2, es decir, $P_2 = \dfrac{C+D}{2} = \dfrac{(8,-12,14)}{2} = (4,-6,7) \Longrightarrow P_2(4,-6,7)$
Con vértice en P_1 tenemos los vectores: $\overrightarrow{P_1P_2} = (4,-6,7) - (1,4,-1) = (3,-10,8)$ y $\overrightarrow{P_1A} = (1,2,-3) - (1,4,-1) = (0,-2,-2)$
$$\cos\alpha_1 = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1A}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|\cdot|\overrightarrow{P_1A}|} = \frac{|(3,-10,8)\cdot(0,-2,-2)|}{\sqrt{173}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{|0+20-16|}{2\sqrt{346}} = \frac{\sqrt{346}}{173}$$
Con vértice en P_2 tenemos los vectores: $\overrightarrow{P_2P_1} = (1,4,-1) - (4,-6,7) = (-3,10,-8)$ y $\overrightarrow{P_2C} = (-2,-8,7) - (4,-6,7) = (-6,-2,0)$
$$\cos\alpha_2 = \frac{|\overrightarrow{P_2P_1}\cdot\overrightarrow{P_2C}|}{|\overrightarrow{P_2P_1}|\cdot|\overrightarrow{P_2C}|} = \frac{|(-3,10,-8)\cdot(-6,-2,0)|}{\sqrt{173}\cdot 2\sqrt{10}} = \frac{|18-20|}{2\sqrt{1730}} = \frac{\sqrt{1730}}{1730}$$

b) Calculamos una recta perpendicular a los dos segmentos.
Llamamos r a la recta que contiene al segmento V_1 y s a la que contiene a V_2.

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AB} = (1,6,1) - (1,2,-3) = (0,4,4) = 4(0,1,1) \\ P_r = A(1,2,-3) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2+\lambda \\ z = -3+\lambda \end{cases} \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

$$s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{CD}=(10,-4,7)-(-2,-8,7)=(12,4,0)=4(3,1,0)\\ P_s=C(-2,-8,7)\end{cases}\Longrightarrow s:\begin{cases}x=-2+3\mu\\ y=-8+\mu\\ z=7\end{cases}\quad\forall\mu\in\mathbb{R}$$

Sea t la recta perpendicular a r y s y además las corta.

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\0&1&1\\3&1&0\end{vmatrix}=(-1,3,-3)$$

Encontramos la recta t como corte de dos planos π_1 y π_2.

$$\pi_1:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(-1,3,-3)\\ \overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\ P_r(1,2,-3)\end{cases}\Longrightarrow\pi_1:\begin{vmatrix}x-1&y-2&z+3\\-1&3&-3\\0&1&1\end{vmatrix}=6x+y-z-11=0$$

$$\pi_2:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(-1,3,-3)\\ \overrightarrow{u_s}=(3,1,0)\\ P_s(-2,-8,7))\end{cases}\Longrightarrow\pi_2:\begin{vmatrix}x+2&y+8&z-7\\-1&3&-3\\3&1&0\end{vmatrix}=3x-9y-10z+4=0$$

$$t:\begin{cases}6x+y-z-11=0\\ 3x-9y-10z+4=0\end{cases}\Longrightarrow t:\begin{cases}x=\theta\\ y=6-3\theta\\ z=-5+3\theta\end{cases}$$

Corte de r con t:

$$\begin{cases}x=\theta=1\\ y=6-3\theta=2+\lambda\\ z=-5+3\theta=-3+\lambda\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\theta=1\\ \lambda=1\end{cases}\Longrightarrow P(1,3,-2)$$

Corte de s con t:

$$\begin{cases}x=\theta=-2+3\mu\\ y=6-3\theta=-8+\mu\\ z=-5+3\theta=7\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\theta=4\\ \mu=2\end{cases}\Longrightarrow Q(4,-6,7)$$

Habría que comprobar que estos puntos están contenidos en los segmentos correspondientes. El segmento V_1 es una parte acotada de la recta r entre $A(1,2,-3)$ y $B(1,6,1)$. El punto A corresponde a $\mu=0$ y el B a $\mu=4$, luego el segmento V_1 es una parte acotada de la recta r para valores $\mu\in[0,4]$. El punto $P(1,3,-2)$ corresponde a un valor de $\mu=1\in[0,4]\Longrightarrow P\in V_1$.
El punto Q coincide con el punto medio entre $C(-2,-8,7)$ y $D(10,-4,7)$ y, por tanto, $Q\in V_2$.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

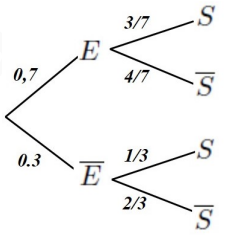
Pregunta 6 (2,5 puntos) En una empresa tecnológica internacional el 70 % de los empleados son europeos, una tercera parte de los empleados no europeos se dedica al desarrollo de *software*, labor a la que se dedican también tres de cada siete de los empleados europeos. Por el cincuenta aniversario la empresa elige al azar un empleado que será agraciado con un importante paquete de acciones de la empresa. Con estos datos se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el empleado agraciado sea uno de los europeos que no realiza desarrollo de *software* en la empresa.

b) (1.5 puntos) En un segundo sorteo se toman al azar 10 empleados distintos y recibirán el mismo paquete de acciones, a repartir, si como mucho 2 de ellos desarrollan *software* para la empresa. Calcular la probabilidad de que la empresa tenga que dar este segundo paquete de acciones.

Solución:

a) Sean E empleado europeo, $\overline{E}$ no europeo, S desarrolla *software* y $\overline{S}$ no desarrolla *software*. habitual.
$P(E \cap \overline{S}) = P(\overline{S}|E)P(E) = 0,7 \cdot \frac{4}{7} = 0,4$



b) $n = 10$ y $p = P(S) = P(S|E)P(E) + P(S|\overline{E})P(\overline{E}) = \frac{3}{7} \cdot 0,7 + \frac{1}{3} \cdot 0,3 = 0,4$

$$B(10; 0,4)$$

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{10}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^9 + \binom{10}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^8 = 0,16729$

Pregunta 7 (2,5 puntos) Sean A y B dos sucesos en un espacio muestral, $\overline{A}$ y $\overline{B}$ los correspondientes sucesos complementarios. Se sabe que $P(A) = 0,7$, $P(\overline{B}) = 0,2$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,1$.

a) (0,5 puntos) Razone si $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son dos sucesos independientes.

b) (1 punto) Calcule $P(A \cap B)$.

c) (1 punto) Calcule $P(\overline{A}|B)$.

Solución:

Tenemos: $P(A) = 0,7$, $P(\overline{B}) = 0,2$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,1$

a) $P(\overline{A}) = 0,3 \Longrightarrow P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06 \neq P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,1 \Longrightarrow \overline{A}$ y $\overline{B}$ no son independientes.

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,1 \Longrightarrow P(A \cup B) = 0,9$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow 0,9 = 0,7 + 0,8 - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0,6$

c) $P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,8 - 0,6}{0,8} = 0,25$

2) www.yoquieroaprobar.es