Examen de Matemáticas II (Selectividad - Ordinaria 2025)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2,5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1 (2,5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80 % en tiros de uno, del 50 % en tiros de dos y del 40 % en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Solución:
Sean x el número de lanzamientos de un punto, y el número de lanzamientos de dos puntos y z el número de lanzamientos de tres puntos.

$$\left\{\begin{array}{c} 0,8x + 0,5\cdot 2y + 0,4\cdot 3y = 80 \\ \dfrac{y}{3} = \dfrac{x+z}{5} \\ 2z + 5 = x + y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 4x + 5y + 6z = 400 \\ 3x - 5y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 25 \text{ lanzamientos de 1 punto} \\ y = 30 \text{ lanzamientos de 2 puntos} \\ z = 25 \text{ lanzamientos de 3 puntos} \end{array}\right.$$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -5 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 400 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -8 & 9 & -15 \\ 0 & 1 & 14 & 380 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 8F_3 + F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -8 & 9 & -15 \\ 0 & 0 & 121 & 3025 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 121z = 3025 \Longrightarrow z = 25 \\ -8y + 225 = -15 \Longrightarrow y = 30 \\ x + 30 - 50 = 5 \Longrightarrow x = 25 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 30 \\ z = 25 \end{array}\right.$$

Pregunta 2 (2,5 puntos) Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1,25 puntos) Para $\lambda = 5$, calcular un vector no nulo $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfaga que

$$(A - \lambda I) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

.

Solución:

a) $P(\lambda) = det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$
$(2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$

$P(\lambda) = 0 \Longrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$ y $\lambda = 5$.

b) Si $\lambda = 5 \Longrightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ y tenemos el sistema homogéneo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por ser un sistema homogéneo siempre tiene solución (la trivial $x = y = z = 0$) y por el apatado anterior $|A - 5I| = 0 \Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \dfrac{5t}{3} \end{cases}$$

Una de estas soluciones sería $t = 3 \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$

Bloque 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 3 (2,5 puntos) Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{9}\right) + 2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) (0,75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0, 12]$ contenida completamente en el muro?

b) (1,25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.

www.musat.net

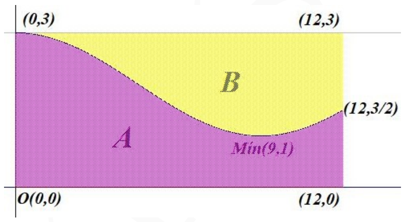
c) (0,5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?

Solución:

a) Tenemos $f(0) = 3$,y $f(12) = \frac{3}{2}$.
$f'(x) = -\frac{\pi x}{9} \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 9$

	$(0,9)$	$(9,12)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(9,12)$, y decreciente en el intervalo $(0,9)$, tiene un mínimo relativo en el punto $(9,1)$ que también sería absoluto. El máximo absoluto estaría en el punto $(0,3)$
Como la función es continua y cumple $f(x) \le 3$ y $f(x) \ge 0$ $\forall x \in [0,12]$ podemos afirmar que la curva se encuentra contenida dentro del rectángulo que describe el muro.



b) Por lo visto en el apartado anterior sabemos que la función no corta al eje de abscisas en $[0,12]$ y el área $A = \int_0^{12} f(x)\,dx = \int_0^{12} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2\right) dx = \frac{9}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x\Big]_0^{12} = 24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \simeq 21,51902\,m^2$
La medida del muro es de $12 \cdot 3 = 36\,m^2$, luego
$B = 36 - 21,51902 = 14,48098\,m^2$

c) Para pintar A necesita $\frac{21,51902}{3} \simeq 7,173 \Longrightarrow$ tiene que comprar 8 botes de spray.

Bloque 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4 (2,5 puntos) Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z = 1$, se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

b) (0,75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r.

c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,0,1)\\ P_r(1,0,2)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=0\\ z=2+\lambda\end{array}\right. \quad \forall\lambda\in\mathbb{R} \ \text{ y } \ \overrightarrow{u_\pi}=(1,2,-3)$$

a) $\pi':\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_\pi}=(1,2,-3)\\ \overrightarrow{u_r}=(2,0,1)\\ P_r(1,0,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \pi':\left|\begin{array}{ccc}x-1 & y & z-2\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{array}\right|=2x-7y-4z+6=0$

b) Calculamos el punto de intersección de r con π:
$(1+2\lambda)+2(0)-3(2+\lambda)-1=0\Longrightarrow \lambda=-6\Longrightarrow P_s(-11,0,-4)$.
$\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_\pi}=\left|\begin{array}{ccc}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{array}\right|=(2,-7,-4)$
$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(2,-7,-4)\\ P_s(-11,0,-4)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=-11+2t\\ y=-7t\\ z=-4-4t\end{array}\right. \quad \forall t\in\mathbb{R}$

c) Sea $P(1+2\lambda,0,2+\lambda)\in r$:
$d(P,\pi)=\dfrac{|(1+2\lambda)+2(0)-3(2+\lambda)-1|}{\sqrt{1+4+9}}=\dfrac{|-\lambda-6|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}\Longrightarrow |-\lambda-6|=14\Longrightarrow$
$|\lambda+6|=14$:

- $\lambda+6=14\Longrightarrow\lambda=8\Longrightarrow P_1(17,0,10)$.
- $\lambda+6=-14\Longrightarrow\lambda=-20\Longrightarrow P_2(-39,0,-18)$.

Pregunta 5 (2,5 puntos) Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi: x+y=2$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π.

b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π.

c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Solución:

a) $d(P,\pi)=\dfrac{|0+1+0-2|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ u$

b) Calculamos una recta $r\perp\pi$ que contenga a P:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(1,1,0)\\ P_r=P(0,1,1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1\end{array}\right.$$

Q es el punto de corte de r con π:

$$\lambda+(1+\lambda)=2\Longrightarrow\lambda=\frac{1}{2}\Longrightarrow\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)$$

www.musat.net

c) Corte con el eje OX: hacemos $y=0 \Longrightarrow x=2 \Longrightarrow A(2,0,0)$
Corte con el eje OY: hacemos $x=0 \Longrightarrow y=2 \Longrightarrow B(0,2,0)$
$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)-(2,0,0)=(-2,2,0)$ y $\overrightarrow{AP}=(0,1,1)-(2,0,0)=(-2,1,1)$
$$V=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -2 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(2,2,2)|=\sqrt{3}\ u^2$$

Bloque 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 6 (2,5 puntos) Sea $E=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7)=P(3)=\frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.
Se consideran los sucesos $A=\{7,11,13,19\}$, $B=\{2,5,7,13,17\}$ y $C=\{3,5,7,11,13\}$. Se pide calcular:

a) (1,25 puntos) $P((\overline{A-C})\cap B)$.

b) (1,25 puntos) $P((A\cap B)|\overline{C})$.

Solución:
Tenemos $P(7)=P(3)=\frac{1}{4}$ y $P(2)=P(5)=P(11)=P(13)=P(17)=P(19)=\frac{1-1/2}{6}=\frac{1}{12}$

a) $P((\overline{A-C})\cap B)=P((\overline{A\cap\overline{C}})\cap B))=P((\overline{A}\cup\overline{\overline{C}})\cap B))=P((\overline{A}\cup C)\cap B))$

$\overline{A}=\{2,3,5,17\}$, $\overline{A}\cup C=\{2,3,5,7,11,13,17\}$ y $P((\overline{A}\cup C)\cap B))=\{2,5,7,13,17\}=P(B)=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$
Luego: $P((\overline{A-C})\cap B)=\frac{7}{12}$

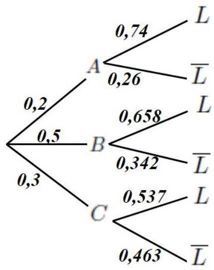
b) $P((A\cap B)|\overline{C})=\dfrac{P((A\cap B)\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}$
$A\cap B=\{7,13\}$, $\overline{C}=\{2,17,19\}$ y $(A\cap B)\cap\overline{C})=\emptyset \Longrightarrow P((A\cap B)\cap\overline{C})=P(\emptyset)=0$
Luego: $P((A\cap B)|\overline{C})=\dfrac{P(\emptyset)}{P(\overline{C})}=\dfrac{0}{3/12}=0$

Pregunta 7 (2,5 puntos) Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20 % de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50 % entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74 % de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65,8 % entre los de 25 a 64 y al 53,7 % entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.

b) (1,25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

Solución:



a) Sean A la población entre 14 y 24 años, B entre 25 y 64, C mayor de 64, L lector habitual y $\overline{L}$ no lector habitual.
$P(L) = P(L|A)P(A) + P(L|B)P(B) + P(L|C)P(C) =$
$0,2 \cdot 0,74 + 0,5 \cdot 0,658 + 0,3 \cdot 0,537 = 0,6381$

b) $P(B|\overline{L}) = \dfrac{P(\overline{L}|B)P(B)}{P(\overline{L})} = \dfrac{0,342 \cdot 0,5}{1 - 0,6381} = 0,4725$