Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Noviembre 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1,25 puntos) Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) (1,25 puntos) Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1.

Solución:

a) Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -a = a \Longrightarrow a = 0 \\ b = c \\ -c = -b \Longrightarrow b = c \\ d = -d \Longrightarrow d = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

Como $X^2 = I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow b = \pm 1$

Luego $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ o $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Ahora sea $Y = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y tenemos: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -a & c \\ -b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -a = -a \\ c = -c \Longrightarrow c = 0 \\ -b = b \Longrightarrow b = 0 \\ d = d \end{cases} \Longrightarrow Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Además tenemos: $\begin{cases} a + d = 0 \\ ad = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1, \quad d = -1 \\ a = -1, \quad d = 1 \end{cases}$

Luego $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ o $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 2 (2,5 puntos) Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros.

a) (1,25 puntos) ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?

b) (1,25 puntos) Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es $\dfrac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

Solución:
Sean x el precio del perfume tipo A, y del tipo B y z del tipo C.

a) $$\begin{cases} 20x + 30y + 15z = 2200 \\ 15x + 10y + 10z = 1250 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 6y + 3z = 440 \\ 3x + 2y + 2z = 250 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 3z = 440 - 6y \\ 3x + 2z = 250 - 2y \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x + 3z = 440 - 6\lambda \\ 3x + 2z = 250 - 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2(-65 + 3\lambda) \\ y = \lambda \\ z = 10(32 - \lambda) \end{cases}$$

$$25x + 10y + 16z = 50(-65 + 3\lambda) + 10\lambda + 160(32 - \lambda) = 1870\,€$$

b) $$\begin{cases} 4x + 6y + 3z = 440 \\ 3x + 2y + 2z = 250 \\ z = \dfrac{2}{5}x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 6y + 3z = 440 \\ 3x + 2y + 2z = 250 \\ 2x - 5z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 50\,€ \text{ tipo } A \\ y = 30\,€ \text{ tipo } B \\ z = 20\,€ \text{ tipo } C \end{cases}$$

Resolución del sistema por Gauss:

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 6 & 3 & 440 \\ 3 & 2 & 2 & 250 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ 4F_2 - 3F_1 \\ 2F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 6 & 3 & 440 \\ 0 & -10 & -1 & -320 \\ 0 & -6 & -13 & -440 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 3F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 6 & 3 & 440 \\ 0 & -10 & -1 & -320 \\ 0 & 0 & -62 & -1240 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema compatible determinado.}$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{-1240}{-62} = 20 \\ -10y - 20 = -320 \Longrightarrow y = 30 \\ 4x + 180 + 60 = 440 \Longrightarrow x = 50 \end{cases}$$

Problema 3 (2,5 puntos) Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

Solución: Sean x la nota de Antonio, y la de María y z la de Paula.

$$\begin{cases} x = \dfrac{z}{2} + \dfrac{y}{3} \\ 2y = x + z \\ z = x + 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6x - 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 9 \\ z = 10 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & -2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 6F_2-F_1\\ 6F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & -3 & 0\\ 0 & -10 & 9 & 0\\ 0 & 2 & -3 & -12\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 5F_3+F_2\end{array}\right]=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & -3 & 0\\ 0 & -10 & 9 & 0\\ 0 & 0 & -6 & -60\end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} -6z=-60\Longrightarrow z=10\\ -10y+90=0\Longrightarrow y=9\\ 6x-18-30=0\Longrightarrow x=8\end{array}\right.$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Consideremos las matrices reales $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b & 2b & b\\ 2b & 3b & b\\ b & b & b\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ con $b\neq 0$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1}=A$.

b) (0,75 puntos) Calcular el determinante de la matriz AA^t.

c) (0,5 puntos) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ para $b=1$.

Solución:

a) $B=\begin{pmatrix} b & 2b & b\\ 2b & 3b & b\\ b & b & b\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow B^{-1}=\dfrac{1}{b}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$BCB^{-1}=A\Longrightarrow b\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\dfrac{1}{b}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

La igualdad se cumple $\forall b\in\mathbb{R}-\{0\}$

b) $|AA^t|=|A||A^t|=|A||A|=|A|^2=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}^2=12^2=144$

c) Si $b=1$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} z = 5 \\ -y - 5 = -7 \Longrightarrow y = 2 \\ x + 4 + 5 = 3 \Longrightarrow x = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$$