Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2024

Problema 1 (2,5 puntos) Considera matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcula A^{2024}.

b) (1,5 puntos) Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

Solución:

a) $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 2024/8 & 2024/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Como $|A| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2XA + I = O \Longrightarrow A^2XA = O - I = -I \Longrightarrow A^2X = -A^{-1} \Longrightarrow X = -(A^2)^{-1}A^{-1} = -(A^{-1})^2A^{-1} = -(A^{-1})^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Problema 2 (2,5 puntos) Considera el sistema $\begin{cases} y + z = 1 \\ (k-1)x + y + z = k \\ x + (k-1)y + z = 0 \end{cases}$

a) (1,75 puntos) Discute el sistema según los valores de k.

b) (0,75 puntos) Para $k = 1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = (k-1)(k-2) = 0 \Longrightarrow k = 1, \ k = 2$$

- Si $k \in \mathbb{R} - \{1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = $ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $k = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 1 - \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

$$\text{Si } y = 0 \Longrightarrow 1 - \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Problema 3 (2,5 puntos) En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

a) (0,75 puntos) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.

b) (1 punto) ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?

c) (0,75 puntos) Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

Solución:
Sean x el número de perros de la raza 1, y de la raza 2 y z de la raza 3.

	A	B	C
raza 1	2	0	1
raza 2	1	0	1
raza 3	3	1	3
	410	30	310

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x+y+3z=410 \\ z=30 \\ x+y+3z=310 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix}$

b) $\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & 3 & 310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & -1 & -3 & -210 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} z=30 \\ -y-90=-210 \Longrightarrow y=120 \\ x+120+90=310 \Longrightarrow x=100 \end{array}\right.$

Pueden coexistir 100 perros de la raza 1, 120 de la raza 2 y 30 de la raza 3.

c)

	A	B	C
raza 1	2	0	1
raza 2	1	1	1
raza 3	3	1	3
	410	30	310

$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y+3z=410 \\ y+z=30 \\ x+y+3z=310 \end{array}\right.$

$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 1 & 3 & 310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 2 & 1 & 3 & 410 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & -1 & -3 & -210 \\ 0 & 1 & 1 & 30 \end{pmatrix} =$

$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 310 \\ 0 & -1 & -3 & -210 \\ 0 & 0 & -2 & -180 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2z=-180 \Longrightarrow z=90 \\ -y-270=-210 \Longrightarrow y=-60 \\ x-60+270=310 \Longrightarrow x=100 \end{array}\right.$

Para que fuese viable las soluciones no deben ser negativas, por tanto, no hay posibilidad de solución.

Problema 4 (2,5 puntos) Sea $x \in \mathbb{R}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$ Se pide:

a) (1,5 puntos) Da el $rg(A)$ según los valores de x. Para $x=1$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

b) (1 punto) Toma $x = 1$. Supongamos que B es una matriz 3×3 con $det(B) = 5$. Calcula $det(AB)$. Razona cuál debe ser el valor de $det\left(\frac{1}{5}AB\right)$.

Solución:

a) $|A| = 2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$

- Si $x = 2 \Longrightarrow |A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$
- Si $x \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$

Si $x = 1 \Longrightarrow |A| = 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Si $x = 1 \Longrightarrow |A| = 1 \Longrightarrow |AB| = |A||B| = 1 \cdot 5 = 5$
$\left|\frac{1}{5}AB\right| = \left(\frac{1}{5}\right)^3 |AB| = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 5 = \frac{1}{25}$