# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

**Noviembre 2023**

---

**Problema 1** (2,5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule los valores del parámetro $a$ para los que tanto $A$ como $B$ admitan inversa.

b) (1,5 puntos) Para $a = 1$, halle una matriz $X$ que satisfaga $A \cdot X \cdot B = C$

**Solución:**

a) $|A| = a(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \ \forall\, a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$
$|B| = -2 + a = 0 \Longrightarrow a = 2 \Longrightarrow \exists\, B^{-1}\ \ \forall\, a \in \mathbb{R} - \{2\}$
Para que tengan inversa las dos matrices $\forall\, a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$.

b) Si $a = 1$ las matrices $A$ y $B$ tienen inversa:

$$A \cdot X \cdot B = C \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Problema 2** (2,5 puntos) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 puntos) Pruebe que se verifica que $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\left(A^2 - 4A + 5I_3\right)$.

b) (1 punto) Dada la ecuación matricial $X^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, determine la dimensión de $X$ y resuelva la ecuación.

**Solución:**

a) $|A| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2}\left(A^2 - 4A + 5I_3\right) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $\underset{n\times m}{X^t} \cdot \underset{3\times 3}{A} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \Longrightarrow n = 2$ y $m = 3 \Longrightarrow \underset{2\times 3}{X^t} \Longrightarrow \underset{3\times 2}{X}$

$$X^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Problema 3** (2,5 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a) (1,25 puntos) Determine el orden (dimensión) de la matriz $X$ para que la ecuación matricial $ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Calcule $X$.

b) (1,25 puntos) Determine el valor(es) del parámetro $m$ para que el sistema sea compatible y calcule la solución del mismo para $m = 3$.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + my + z = 0 \end{cases} \quad (S)$$

**Solución:**

a) $\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 2}{B} \cdot \underset{m\times n}{X} = \underset{2\times 1}{C} \Longrightarrow m = 2$ y $n = 1 \Longrightarrow \underset{2\times 1}{X}$

Sea $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longrightarrow ABX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3a+5b \\ a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 24 \\ b = -14 \end{array} \right. \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 24 \\ -14 \end{pmatrix}$$

b) Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, siempre tiene solución $\forall m \in \mathbb{R}$. Si $m = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{array} \right. \quad (S) \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{array} \right.$$

**Problema 4** (2,5 puntos) En una fiesta se bebieron $m$ copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0,15 litros y en total se tomaron $3m$ litros de vino.

a) (0,5 puntos) Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro $m$ donde las incógnitas $x$ e $y$ sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.

b) (2 puntos) ¿Para qué valores de $m$ el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

**Solución:**

a) Sea $x$ el número de copas de vino tinto e $y$ del blanco.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{m} = y \\ x + y = \dfrac{3m}{0,15} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - my = 0 \\ x + y = 20m \end{array} \right.$$

b) $\overline{A} = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 1 & 1 & 20m \end{array} \right)$ con $|A| = 1 + m = 0 \Longrightarrow m = -1$

- Si $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$Rango$(A) =$n$^{\underline{o}}$ de incognitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
- Si $m = -1$: $\overline{A} = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -20 \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema incompatible y no tiene solución.
- Si $3m = 9 \Longrightarrow m = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ x + y = 60 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 45 \text{ copas de vino tinto} \\ y = 15 \text{ copas de vino blanco} \end{array} \right.$$