

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Diciembre 2023

Problema 1 (2 puntos) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Determine los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.
- b) Calcular A^{-1} para $a = 1$.

Solución:

a) $|A| = a^2 + 2a + 1 = 0 \implies a = -1 \implies \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Si $a = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Problema 2 (4 puntos) Una empresa de transportes ha comprado dos furgonetas, una grande y otra mediana. La normativa vigente solo permite circular un máximo de 400000 km a la grande, 250000 km a la mediana y un total de 600000 km entre ambas. Por las rutas que establece la empresa, por cada kilómetro que recorre la furgoneta grande, la mediana circula como máximo 2 km; y por cada kilómetro que recorre la furgoneta mediana, la grande hace un máximo de 4 km. Por cada kilómetro de circulación de la furgoneta grande se obtiene un beneficio de 10 céntimos y por cada kilómetro de circulación de la mediana un beneficio de 5 céntimos.

Determine el máximo beneficio posible y el número de kilómetros que debe recorrer cada una de las furgonetas para obtenerlo.

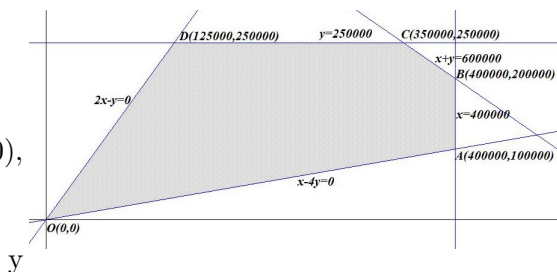
Solución:

Sean x el número de kilómetros recorridos por la furgoneta grande e y los de la mediana.

- La región factible S es:

$$\begin{cases} x \leq 400000 \\ y \leq 250000 \\ x + y \leq 600000 \\ 2x - y \geq 0 \\ x - 4y \leq 0 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices a estudiar serán: $O(0, 0)$,
 $A(400000, 100000)$,
 $B(400000, 200000)$,
 $C(350000, 250000)$,
 $D(125000, 250000)$

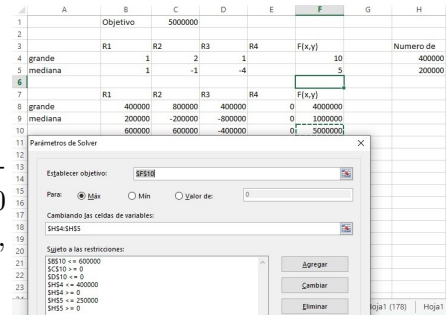


- La función objetivo es $f(x, y) = 10x + 5y \implies$

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f(400000, 100000) = 4500000 \\ f(400000, 200000) = 5000000 \\ f(350000, 250000) = 4750000 \\ f(125000, 250000) = 2500000 \end{cases}$$

El máximo beneficio se obtiene cuando la furgoneta grande hace 400000 kms y la mediana 200000 kms, siendo este beneficio de 5000000 céntimos, es decir, 50000€

Solución por solver



Problema 3 (4 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y + az = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

- Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a .
- Resuelva el sistema para $a = 2$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = 1 - a^2 = 0 \implies a = \pm 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^0$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) =$$
$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema incompatible

- b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + y + 2z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$