Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Diciembre 2023

Problema 1 (2,5 puntos) El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0,3,8)$ y $Q(2,1,6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

Solución:

Sea π el plano mediador del segmento $\overline{PQ}$, si $H(x,y,z)\in\pi \Longrightarrow d(H,P)=d(H,Q)\Longrightarrow$ $\left|\overrightarrow{PH}\right|=\left|\overrightarrow{QH}\right| \Longrightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2+(z-8)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-6)^2}\Longrightarrow$

$4x-4y-4z+32=0\Longrightarrow \pi : x-y-z+8=0$

El plano $\pi : x-y-z+8=0$ corta con los ejes coordenados en:

- Con OX hacemos $y=0$ y $z=0\Longrightarrow A(-8,0,0)$
- Con OY hacemos $x=0$ y $z=0\Longrightarrow B(0,8,0)$
- Con OZ hacemos $x=0$ y $y=0\Longrightarrow C(0,0,8)$
- $\overrightarrow{AB}=(0,8,0)-(-8,0,0)=(8,8,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,0,8)-(-8,0,0)=(8,0,8)$

$$S_t=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 8 & 8 & 0\\ 8 & 0 & 8\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(64,-64,-64)|=32\sqrt{3}\ u^2$$

Problema 2 (2,5 puntos) Considera el punto $A(-1,1,3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2,1,1)$ y $C(0,1,-1)$

a) (1,5 puntos) Halla la distancia del punto A a la recta r.

b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{CB}=(2,0,2)=2(1,0,1)\\ P_r=C(0,1,-1)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=1\\ z=-1+\lambda\end{array}\right.$$

a) $\overrightarrow{P_rA}=(-1,0,4)$, $\left|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{u_r}\right|=|\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 4\end{vmatrix}|=|(0,-5,0)|=5$ y $|\overrightarrow{u_r}|=\sqrt{2}$

$$d(A,r)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{u_r}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\ u$$

b) $\overrightarrow{AB} = (3, 0, -2)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, 0, -4)$:

$$S_t = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(0, 10, 0)| = 5\ u^2$$

Problema 3 (2,5 puntos) Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$

a) (1,5 puntos) Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $P(2, 6, -2)$.

b) (1 punto) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

Solución:

a) $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 2) \\ P_r(2, 0, -2) \end{cases}$ y

$\overrightarrow{P_rP} = (0, 6, 0)$

$$\left|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}\right| = \left|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right| = |(12, 0, 6)| = |6(2, 0, 1)| = 6\sqrt{5} \text{ y } |\overrightarrow{u_r}| = \sqrt{6}$$

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{u_r}\right|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{30}\ u$$

b) Tenemos: $\overrightarrow{u_{\pi_1}} = (1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1, 1, 0)$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}|}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}| \cdot |\overrightarrow{u_{\pi_2}}|} = \frac{1 - 1 + 0}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Problema 4 (2,5 puntos) Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $A(0, 2, -2)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(2, 3, 2)$ con los planos cartesianos.

Solución:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 0, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 1, 4) \\ A(0, 2, -2) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y - 2 & z + 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = x + 2y - z - 6 = 0$$

- Con OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow A'(6, 0, 0)$
- Con OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow B'(0, 3, 0)$
- Con OZ hacemos $x = 0$ y $y = 0 \Longrightarrow C'(0, 0, -6)$
- $\overrightarrow{OA'} = (6, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB'} = (0, 3, 0)$ y $\overrightarrow{OC'} = (0, 0, -6)$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-108| = 18\ u^3$$