Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2023

Problema 1 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (m, -m, 2)$, $\overrightarrow{v} = (2, 0, -m)$ y $\overrightarrow{w} = (m, -3, 7)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} m & -m & 2 \\ 2 & 0 & -m \\ m & -3 & 7 \end{vmatrix} = (m-1)(m^2 - 2m + 12) = 0 \Longrightarrow m = 1$$

Si $m = 1$ los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

a) Calcular m para que los vectores $\overrightarrow{u} = (m, -3, m+2)$ y $\overrightarrow{v} = (5, m+2, 2)$ sean perpendiculares.

b) Encontrar un vector perpendicular $\overrightarrow{u} = (1, 3, -5)$ y a $\overrightarrow{v} = (0, 1, -1)$ que tenga módulo 7.

c) Decidir si los vectores $\overrightarrow{u} = (1, -3, 1)$ y $\overrightarrow{v} = (3, 2, 3)$ son perpendiculares.

Solución:

a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5m - 3m - 6 + 2m + 4 = 0 \Longrightarrow m = \dfrac{1}{2}$

b)

$$\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 1, 1) \Longrightarrow |\overrightarrow{w}| = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{t} = \frac{7}{\sqrt{6}}(2, 1, 1) = \left(\frac{7\sqrt{6}}{3}, \frac{7\sqrt{6}}{6}, \frac{7\sqrt{6}}{6} \right)$$

c) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3 - 6 + 3 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Problema 3 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (1, -2, 1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (3, 7, 4)$. Calcular:

a) Volumen de paralelepípedo que determinan.

b) Área de la base determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

c) Altura del paralelepípedo.

d) Volumen del tetraedro que determinan.

e) Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

f) Altura del tetraedro.

Solución:

a)

$$V_p = \left| \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} \right| = |5| = 5\ u^3$$

b)

$$S_p = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = \left| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = |(-5, 0, 5)| = 5\sqrt{2}\ u^2$$

$$S_p = |\overrightarrow{v}| \cdot h_p \Longrightarrow h_p = \frac{S_p}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{5\sqrt{2}}{3}\ u$$

c)

$$V_p = S_p \cdot H_p \Longrightarrow H_p = \frac{V_p}{S_p} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

d)

$$V_t = \frac{1}{6} V_p = \frac{5}{6}\ u^3$$

e)

$$S_t = \frac{1}{2} S_p = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ u^2,\ \ h_t = h_p = \frac{5\sqrt{2}}{3}\ u$$

f)

$$H_t = H_p = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(-3, 0, -5)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(7, 5, 9)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

a) Encontrar el 4º vértice D.

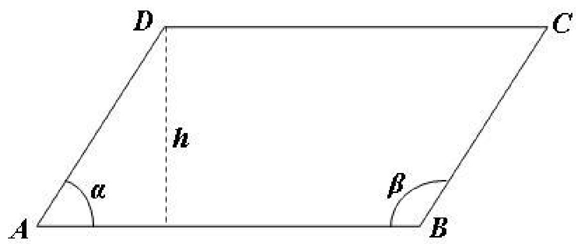
b) Calcular la longitud de sus lados.

c) Calcular sus ángulos y su centro.

d) Calcular el punto simétrico de A respecto de C.

e) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.

Solución



a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-3, 0, -5) + (4, 4, 9) = (1, 4, 4)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(6, 1, 5)| = \sqrt{62}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(4, 4, 9))| = \sqrt{113}$

c)
$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \frac{73}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{113}} \Longrightarrow \alpha = 29^\circ 17' 29'' \text{ y } \beta = 150^\circ 42' 31''$$

El centro es $M\left(2, \frac{5}{2}, 2\right)$

d) $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (17, 10, 23)$

e)
$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(10, 5, 14) = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-3, 0, -5) + \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{14}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{14}{3}\right) = \left(\frac{11}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{11}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right) + \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{14}{3}\right) = (7, 5, 9)$$