Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato CN
Febrero 2024

Problema 1 (2,5 puntos)

a) (1,25 puntos) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$ y $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$.

b) (1,25 puntos) Calcule $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{3}{2}$

Solución:

a) ☛ $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ dx = \dfrac{dt}{\cos x} \end{bmatrix} = \int t^5 \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int t^5 \, dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C$

☛ $\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \dfrac{dx}{x} \\ dx = x dt \end{bmatrix} = \int \frac{t}{x} \cdot x dt = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

b) $I(x) = \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = \dfrac{1}{x} \, dx \Longrightarrow v = \ln x \end{bmatrix} = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} \, dx = (\ln x)^2 - I(x) \Longrightarrow 2I(x) = (\ln x)^2 \Longrightarrow I(x) = \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

$\int_e^B \frac{\ln x}{x} \, dx = I(B) - I(e) = \frac{(\ln B)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Longrightarrow (\ln B)^2 - 1 = 3 \Longrightarrow (\ln B)^2 = 4 \Longrightarrow \ln B = \pm 2 \Longrightarrow B = e^2$

Como $B \geq e$ la solución $B = e^{-2}$ no es válida.

Problema 2 (2,5 puntos) Calcula la integral de la función $f(x) = \frac{x^4 + 2x - 6}{x^2 + x - 2}$.

Solución:

$$
\begin{array}{rl}
\big(\quad x^4 \qquad\qquad\quad +2x-6\big) & : \big(x^2+x-2\big) = x^2-x+3+\dfrac{-3x}{x^2+x-2} \\
-\,x^4-x^3+2x^2 \qquad\qquad & \\
\hline
-\,x^3+2x^2+2x \quad & \\
x^3\ \ +x^2-2x \quad & \\
\hline
3x^2 \qquad -6 & \\
-\,3x^2-3x+6 & \\
\hline
-\,3x &
\end{array}
$$

$$\int \frac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}\,dx = \int\left(x^2-x+3-\frac{3x}{x^2+x-2}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-\int\frac{3x}{x^2+x-2}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{c}
x^2+x-2=(x-1)(x+2) \\
\dfrac{3x}{x^2+x-2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}=\dfrac{A(x+2)+B(x-1)}{x^2+x-2} \\
3x=A(x+2)+B(x-1) \\
x=-2\Longrightarrow -6=-3B\Longrightarrow B=2 \\
x=1\Longrightarrow 3=3A\Longrightarrow A=1 \\
\dfrac{3x}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}
\end{array}\right] =$$

$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-\ln|x-1|-2\ln|x+2|+C$$

Problema 3 (2,5 puntos) Resolver los siguientes apartados:

a) (1 punto) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\frac{3}{2}$$

b) (1,5 puntos) Resolver la siguiente integral indefinida: $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to -2}\frac{2kx}{2x+6}=\frac{-4k}{2}=-2k=\frac{3}{2}\Longrightarrow k=-\frac{3}{4}$

b) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-1}\,dx=\left[\begin{array}{l} t=\sqrt{2x-1} \\ t^2=2x-1\Longrightarrow x=\dfrac{t^2+1}{2} \\ 2tdt=2dx \\ dx=tdt\end{array}\right]=\int\frac{t^2+1}{2}\cdot t\cdot t\,dt=\frac{1}{2}\int t^2(t^2+$

$\displaystyle 1)\,dt=\frac{1}{2}\int(t^4+t^2)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{2x-1})^5}{5}+\frac{(\sqrt{2x-1})^3}{3}\right)+C=$

$\displaystyle \frac{\sqrt{(2x-1)^5}}{10}+\frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{6}+C=\frac{(2x-1)^2\sqrt{2x-1}}{10}+\frac{(2x-1)\sqrt{2x-1}}{6}+C=$

$$(2x-1)\sqrt{2x-1}\left(\frac{2x-1}{10}+\frac{1}{6}\right)+C=\frac{(3x+1)(2x-1)\sqrt{2x-1}}{15}+C=$$
$$\frac{(6x^2-x-1)\sqrt{2x-1}}{15}+C$$

Problema 4 (2,5 puntos) Calcula los siguientes límites:

I. (1,25 puntos) $\lim_{x\to 0}\left(e^x+x^3\right)^{\frac{1}{x}}$

II. (1,25 puntos) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^2+1}{x-2}\right)$

Solución:

I. $\lim_{x\to 0}\left(e^x+x^3\right)^{\frac{1}{x}}=[1^\infty]=e^\lambda$

$$\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(e^x+x^3-1)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x^3-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+3x^2}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x+x^3\right)^{\frac{1}{x}}=e\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^2+1}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)(x-2)-(x^2+1)(x+2)}{x^2-4}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^2-2x}{x^2-4}=-4$$