Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2023

Problema 1 (2,5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

a) (1,25 puntos) Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot X = 2X$.

b) (1,25 puntos) Calcula todas las matrices M que cumplen $M(B+I) = 2I$. (I es la matriz identidad 2×2)

Solución:

a) $A \cdot X = 2X \Longrightarrow AX - 2X = O \Longrightarrow (A - 2I)X = O \Longrightarrow$ sistema homogéneo.

$$(A-2I)X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a este sistema es $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es cero y tiene rango 2. Luego se trata de un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones)

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $M(B+I) = 2I \Longrightarrow \dfrac{1}{2}M(B+I) = I \Longrightarrow \dfrac{1}{2}M = (B+I)^{-1} \Longrightarrow M = 2(B+I)^{-1} =$
$2\left[\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = 2\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3/2 & -5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

Problema 2 (2,5 puntos) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcula, en caso de que sea posible, las dimensiones de una matriz D tal que se pueda realizar el producto $A \cdot D \cdot B$.

b) (0,5 puntos) Estudia si puede existir una matriz M tal que $M \cdot A = B$.

c) (1,25 puntos) Estudia si existe $(B \cdot A)^{-1}$ y calcúlala en caso de que sea posible.

Solución:

a) $\underset{3\times 2}{A} \cdot \underset{m\times n}{D} \cdot \underset{2\times 3}{B} \Longrightarrow m = 2$ y $n = 2 \Longrightarrow \dim(D) = 2 \times 2$

b) $\underset{m\times n}{M} \cdot \underset{3\times 2}{A} = \underset{2\times 3}{B}$ Para que M se pueda multiplicar con A tiene que ser $n = 3$, y para obtener una matriz de dos filas tiene que ser $m = 2$, pero el resultado sería una matriz de dimensión 2×2, luego no coincidiría con B.

c) $|B \cdot A| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Longrightarrow \exists (B \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 \\ 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$

Problema 3 (2,5 puntos) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad de orden dos $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (0,5 puntos) Compruebe que $(A - 2I)^2 = 3I$.

b) (1,25 puntos) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encuentre la matriz inversa de la matriz A en función de las matrices A e I, y compruebe que coincide con la matriz B.

c) (0,75 punto) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $AX = B$.

Solución:

a) $(A - 2I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$

b) $(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = A^2 - 2AI - 2IA + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I = 3I \Longrightarrow A^2 - 4A = -I \Longrightarrow 4A - A^2 = I \Longrightarrow (4I - A)A = I \Longrightarrow A^{-1} = 4I - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B$

c) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B \overset{A^{-1}=B}{=} B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$

Problema 4 (2,5 puntos) Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema:

$$\begin{cases} (m+1)x + z = 1 \\ (m+1)x + y + z = m+1 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{array}\right), \ |A| = m^2 - m - 2 = 0 \Longrightarrow m = -1 \text{ y } m = 2.$$

- Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, 2\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

- Si $m = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

- Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$