Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2023

Problema 1 (2 puntos) Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = AB^T - 2I$$

donde B^T es la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $CX = A^T B$, donde A^T es la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) $D = AB^T - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$|D| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \exists D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $CX = A^T B \Longrightarrow \Longrightarrow X = C^{-1} A^T B =$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

Problema 2 (2,5 puntos) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Halla los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.

b) (1,5 puntos) Halla x, distinto de cero, para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$

Solución:

a) $|A - mI| = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = -m^2(m-3) = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = 3$.

Si $m = 0$ o $m = 3 \Longrightarrow |A - mI| = 0 \Longrightarrow \nexists (A - mI)^{-1}$

b) Si $\frac{1}{x}(A-I)=\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Longrightarrow$

$$\left[\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\right]^{-1}=x\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{x}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\frac{x}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=A-xI=\begin{pmatrix}1-x&1&1\\1&1-x&1\\1&1&1-x\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{2}=1\Longrightarrow x=2\\-\frac{x}{2}=1-x\Longrightarrow x=2\end{array}\right.\Longrightarrow x=2$$

Problema 3 (2,5 puntos) El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6 %, el 12 % y el 30 %, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

Solución:

Sean x el precio de los refrescos, y de la cerveza y z del vino.

$$\left\{\begin{array}{l}x+y+z=500\\z=x+y-60\\0,06x+0,12y+0,3z=592,6-500\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+y+z=500\\x+y-z=60\\x+2y+5z=1540\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=120\\y=160\\z=220\end{array}\right.$$

Resolución del sistema por Gauss:

$$A=\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&1&500\\1&1&-1&60\\1&2&5&1540\end{array}\right)=\left[\begin{array}{l}F_1\\F_2-F_1\\F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r}1&1&1&500\\0&0&-2&-440\\0&1&4&1040\end{array}\right)\Longrightarrow$$

sistema compatible determinado. $\left\{\begin{array}{l}z=\frac{-440}{-2}=220\\y+880=1040\Longrightarrow y=160\\x+160+220=500\Longrightarrow x=120\end{array}\right.$

Incluyendo impuestos quedaría:

Refrescos $120\cdot 1,06=127,2$€, cerveza $160\cdot 1,12=179{,}2$€ y vino $220\cdot 1,3=286$€

Problema 4 (2,5 puntos) Dado $a\in\mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{r}x-y+az=-1\\2x+y=1\\y+2z=1\end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discute el sistema según los valores de a

b) (0,75 puntos) Resuelve el sistema para el caso $a = -3$ si es posible.

c) (0,75 puntos) Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique $x = 1$. Calcula la solución en ese caso.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 2a + 6 = 0 \Longrightarrow a = -3$

- ☛ Si $a \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ número de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $a = -3$:
  $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) =$
  $\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$
  Sistema compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

b) Si $a = -3 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y - 3z = -1 \\ 3y + 6z = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y = -1 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$

c) Si $a = -3$ y $x = 1$ sustituimos en las soluciones del apartado anterior y queda:

$$(x, y, z) = (1, -1, 1)$$