# Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2023) Selectividad-Opción A

**Tiempo: 90 minutos**

**Problema 1** *(2 puntos)* Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determine los valores de $a$ para los cuales la matriz $A$ es invertible.

b) Calcular $A^{-1}$ para $a = 1$.

**Solución:**

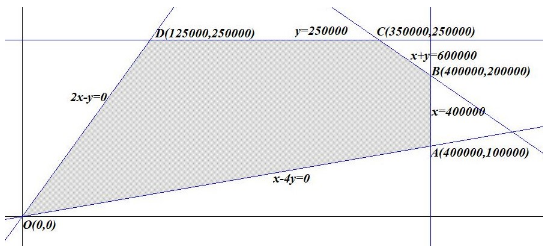
a) $|A| = a^2 + 2a + 1 = 0 \Longrightarrow a = -1 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R} - \{-1\}$

b) Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

**Problema 2** *(2 puntos)* Una empresa de transportes ha comprado dos furgonetas, una grande y otra mediana. La normativa vigente solo permite circular un máximo de 400000 km a la grande, 250000 km a la mediana y un total de 600000 km entre ambas. Por las rutas que establece la empresa, por cada kilómetro que recorre la furgoneta grande, la mediana circula como máximo 2 km; y por cada kilómetro que recorre la furgoneta mediana, la grande hace un máximo de 4 km. Por cada kilómetro de circulación de la furgoneta grande se obtiene un beneficio de 10 céntimos y por cada kilómetro de circulación de la mediana un beneficio de 5 céntimos.
Determine el máximo beneficio posible y el número de kilómetros que debe recorrer cada una de las furgonetas para obtenerlo.

**Solución:**
Sean $x$ el número de kilómetros recorridos por la furgoneta grande e $y$ los de la mediana.

- La región factible $S$ es:
$$\left\{ \begin{array}{l} x \le 400000 \\ y \le 250000 \\ x + y \le 600000 \\ 2x - y \ge 0 \\ x - 4y \le 0 \\ x, y \ge 0 \end{array} \right.$$
Los vértices a estudiar serán: $O(0,0)$, $A(400000, 100000)$, $B(400000, 200000)$, $C(350000, 250000)$ y $D(125000, 250000)$

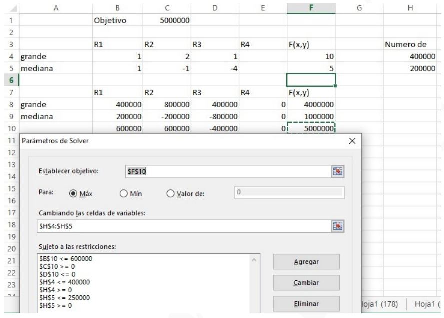



- La función objetivo es $f(x, y) = 10x + 5y \Longrightarrow$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(400000, 100000) = 4500000 \\ f(400000, 200000) = 5000000 \\ f(350000, 250000) = 4750000 \\ f(125000, 250000) = 2500000 \end{cases}$$

El máximo beneficio se obtiene cuando la furgoneta grande hace 400000 kms y la mediana 200000 kms, siendo este beneficio de 5000000 céntimos, es decir, 50000€

Solución por solver




**Problema 3** *(2 puntos)* Se pide:

a) Represente la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ prestando especial atención a la determinación de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Determine los valores de $x$ en los que $f$ alcanza máximos o mínimos relativos.

b) Represente la gráfica de $g(x) = f(x - 3) + 2$, donde $f$ es la función del apartado anterior.

**Solución:**

a) Calculamos

- ☛ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- ☛ Puntos de corte:
  - Con $OY \Longrightarrow f(0) = 1 \Longrightarrow (0, 1)$
  - Con $OX \Longrightarrow f(x) = x^3-3x+1 = 0 \Longrightarrow (-1,9; 0)$, $(0,35; 0)$ y $(1,5; 0)$ (complejos de obtener y no necesarios)
- ☛ Asíntotas no tiene.
- ☛ Monotonía: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(-1, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | creciente $\nearrow$ | decreciente $\searrow$ | creciente $\nearrow$ |

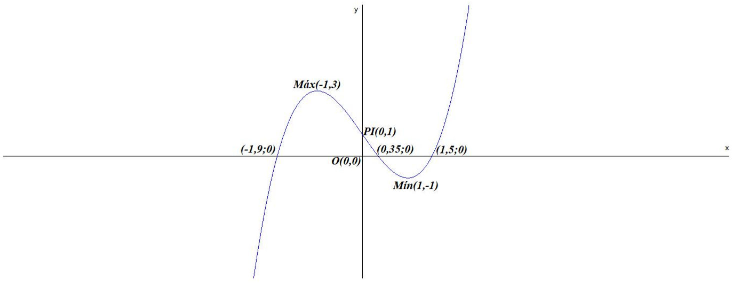
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(-1, 1)$, tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 3)$ y un mínimo relativo en $(1, -1)$.

- ☛ Curvatura: $f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

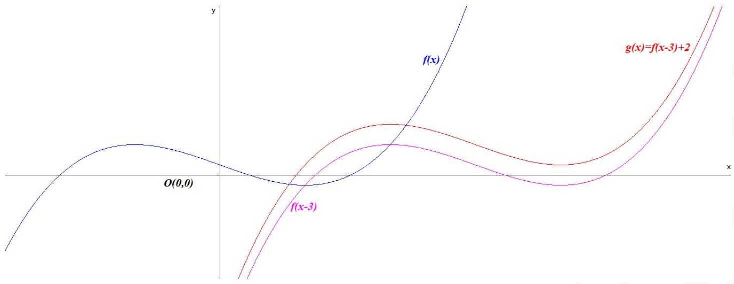
| | $(-\infty, 0)$ | $(0, +\infty)$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | convexa $\frown$ | cóncava $\smile$ |

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$ $\frown$ y cóncava en el $(0, +\infty)$ $\smile$. Tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$

☛ Representación gráfica:




b) $f(x-3)$ es la traslación horizontal derecha de 3 unidades de la función $f(x)$ y $g(x) = f(x-3)+2$ es la traslación vertical hacia arriba de dos unidades de la función $f(x-3)$.




**Problema 4** *(2 puntos)* Considere el lanzamiento de un dado equilibrado. Sea $A$ el suceso el resultado es 1 o 2, $B$ el suceso el resultado es 2 o 3 y $C$ el resultado es par.

a) Verifique que $P(A|C) = P(B|C) = P(A \cap B|C)$.

b) Calcule $P(A \cup B|C)$.

**Solución:**

a) $P(A|C) = \dfrac{1}{3}$ casos favorables sólo hay uno que salga el 2 y 3 casos posibles 2 o 4 o 6.
$P(B|C) = \dfrac{1}{3}$ casos favorables sólo hay uno que salga el 2 y 3 casos posibles 2 o 4 o 6.
$P(A \cap B|C) = \dfrac{1}{3}$, $A \cap B = \{2\}$ luego sólo hay un caso favorable y 3 casos posibles 2 o 4 o 6.
Luego: $P(A|C) = P(B|C) = P(A \cap B|C) = \dfrac{1}{3}$

b) $A \cup B = \{1, 2, 3\} \Longrightarrow P(A \cup B|C) = \dfrac{1}{3}$ sólo hay un caso favorable de tres posibles.

**Problema 5** *(2 puntos)* Para una población en la que se observa una variable aleatoria $X$ con distribución normal, de media desconocida y desviación típica igual a 1,5, se tomó una muestra aleatoria simple para estimar la media poblacional y se obtuvo un intervalo de confianza cuyos extremos son 11,0703 y 12,9297.

a) Determine el valor de la media muestral.

b) Si el tamaño de la muestra fue 10, ¿cuál es el nivel de confianza del intervalo obtenido?

**Solución:**

$$N(\mu; 1,5)$$

a) $\overline{X} = \dfrac{11,0703 + 12,9297}{2} = 12$

b) y $2E = 12,9297 - 11,0703 = 1,8594 \Longrightarrow E = 0,9297$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,9297 = z_{\alpha/2}\frac{1,5}{\sqrt{10}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{\sqrt{10}\cdot 0,9297}{1,5} = 1,96$$

$$P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = P(Z \le 1,96) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 0,95$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %.

# Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2021) Selectividad-Opción B

**Tiempo: 90 minutos**

---

**Problema 1** *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{c} x + ay = a \\ ax + y + az = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de $a$.

b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

**Solución:**

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

- Si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado

- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left[ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\left[ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema incompatible

b) Si $a = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y = a \\ 2x + y + 2z = 0 \\ z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

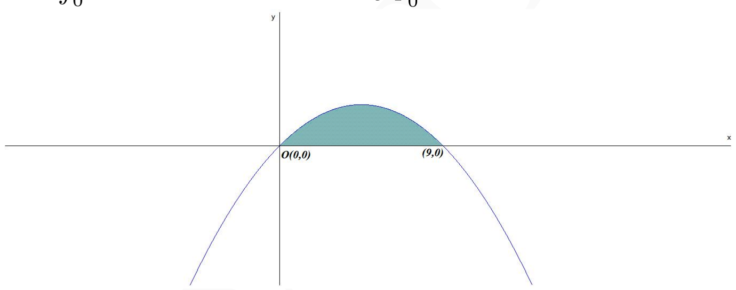
**Problema 2** *(2 puntos)* Se pide:

a) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por el eje de las $x$ y superiormente por la parábola $y = 9x - x^2$.

b) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por la parábola $y = 9x - x^2$ y superiormente por las rectas tangentes a esa parábola en los puntos de corte con el eje de las $x$.

**Solución:**

a) $9x - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 9$. Los límites de integración son los extremos del intervalo $[0, 9]$. La función en este intervalo es positiva ($f(3) = 18 > 0$) y el resultado de la integral debe de ser positiva.
$S = \displaystyle\int_0^9 (9x - x^2)\, dx = \left. \frac{9x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^9 = \frac{243}{2} = 121,5\ u^2$

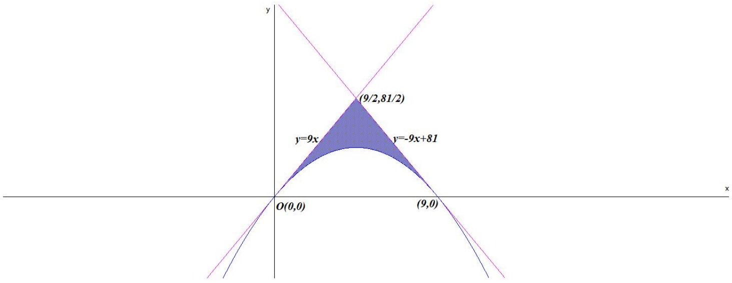



b) $f'(x) = 9 - 2x$
En $(0, 0)$ la pendiente de la recta tangente es $m_0 = f'(0) = 9 \Longrightarrow y = 9x$ es la recta tangente en $(0, 0)$
En $(9, 0)$ la pendiente de la recta tangente es $m_9 = f'(9) = -9 \Longrightarrow y = -9(x - 9) \Longrightarrow y = -9x + 81$ es la recta tangente en $(9, 0)$
Calculamos el punto corte de ambas rectas:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 9x \\ y = -9x + 81 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 9/2 \\ y = 81/2 \end{array} \right.$$

El área del triángulo formado por las dos tangentes y el eje de abscisas es $A = \dfrac{9 \cdot 81/2}{2} = \dfrac{729}{4}\ u^2$

El área buscada es $S_1 = A - S = \dfrac{729}{4} - \dfrac{243}{2} = \dfrac{243}{4} = 60,75\ u^2$




**Problema 3** *(2 puntos)* Una pastelería hace diariamente una cantidad fija de dulces cuya masa requiere de un tiempo de reposo, el cual tiene que ser de una a dos horas. La pastelería usa un ingrediente secreto. La cantidad necesaria de ingrediente secreto, medida en gramos, varía en función del tiempo de reposo de la masa según la siguiente función:

$$Q(t) = \frac{1}{2}t^4 - 3t^2 + 5, \quad 1 \le t \le 2$$

siendo $t$ el tiempo de reposo medido en horas.

a) La producción diaria de dulces tiene un coste fijo de 150 euros más el coste por el uso del ingrediente secreto, el cual cuesta 100 euros/gramo. Obtenga la función que representa el coste de producción diaria de estos dulces y encuentre el tiempo de reposo de la masa que minimiza dicho coste. Indique el valor del coste mínimo.

b) Obtenga el tiempo de reposo que maximiza el coste de producción e indique la cantidad de ingrediente secreto que se necesitaría en este caso.

**Solución:**

a) $C(t) = 150 + 100\left(\dfrac{1}{2}t^4 - 3t^2 + 5\right) = 50\left(t^4 - 6t^2 + 13\right)$
$C'(t) = 200t\left(t^2 - 3\right) = 0 \Longrightarrow t = \pm\sqrt{3}$, la solución negativa no es relevante.
$C''(t) = 600(t^2 - 1) \Longrightarrow C''(\sqrt{3}) = 1200 > 0 \Longrightarrow t = \sqrt{3}$ horas es un mínimo relativo con un coste de $C(\sqrt{3}) = 200$€
Tenemos $C(1) = 400$ y $C(2) = 250 \Longrightarrow$ el mínimo calculado es absoluto.

b) Por la visto en el apartado anterior el máximo coste se produce en $t = 1$ hora de reposo con una cantidad de $Q(1) = \dfrac{5}{2} = 2,5$ gramos.

**Problema 4** *(2 puntos)* Se pide:

a) Se tienen 7 sobres cerrados. Uno de ellos contiene un premio y el resto son sobres vacíos. Se lanza un dado y luego se descartan tantos sobres vacíos como el dado indique. Posteriormente, se escoge al azar uno de los sobres que restan.

b) ¿Cuál es la probabilidad de escoger el sobre premiado?

c) Si salió el premio, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del dado haya sido el 1?

**Solución:**

a) Sean $G$ gana el premio y sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestral del dado.
Tenemos: $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \dfrac{1}{6}$
Tenemos: $P(G|1) = \dfrac{1}{6}$, $P(G|2) = \dfrac{1}{5}$, $P(G|3) = \dfrac{1}{4}$, $P(G|4) = \dfrac{1}{3}$ y $P(G|5) = \dfrac{1}{2}$ y $P(G|6) = 1$

b) $P(G) = P(G|1)P(1)+P(G|2)P(2)+P(G|3)P(3)+P(G|4)P(4)+P(G|5)P(5)+P(G|6)P(6) = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}+1\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{49}{120} \simeq 0,40833$

c) $P(1|G) = \dfrac{P(G|1)P(1)}{P(G)} = \dfrac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{49}{120}} = \dfrac{10}{147} \simeq 0,06803$

**Problema 5** *(2 puntos)* Para estimar la proporción de estudiantes de una determinada facultad que utilizan la cafetería se toma una muestra de estudiantes al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0,55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de estudiantes para garantizar que, con una confianza del 98,02 %, el margen de error en la estimación no supera el 10 %.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 estudiantes, de los cuales 70 utilizaban la cafetería, determine un intervalo de confianza al 95 %. para la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería.

**Solución:**

a) Tenemos $NC = 98,02\,\%$
$NC = 0,9802 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,0198 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0099$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0,0099 = 0,9901 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,33$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2,33\sqrt{\frac{0,55\cdot 0,45}{n}} = 0,1 \Longrightarrow$$

$$n \ge \left(\frac{2,33}{0,1}\right)^2 (0,55\cdot 0,45) = 134,365275 \Longrightarrow n = 135$$

b) $n = 100$, $\hat{p} = \dfrac{70}{100} = 0,7$ y $NC = 95\,\%$:
$NC = 0,95 = 1-\alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$
$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,7\cdot 0,3}{100}} = 0,0898$$

$IC = (\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0,7-0,0898; 0,7+0,0898) = (0,6102; 0,7898) = (61,02\,\%; 78,98\,\%)$