Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Mayo 2023

Problema 1 El crecimiento (en cm) de una variedad de trigo, $C(x)$, en función de la cantidad de fertilizante (en gramos por metro cuadrado) utilizada, x, viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \quad 0 \le x \le 4$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que el crecimiento alcanza su mínimo con una dosis de 3 gramos por metro cuadrado y que para esta dosis las plantas de trigo crecen 8 cm.

Solución:
$C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \Longrightarrow C'(x) = 6x^2 - 2Ax + B$

$$\left\{\begin{array}{l} C(3) = 8 \Longrightarrow 54 - 9A + 3B + 35 = 8 \Longrightarrow 3A - B = 27 \\ C'(3) = 0 \Longrightarrow 54 - 6A + B = 0 \Longrightarrow 6A - B = 54 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 9 \\ B = 0 \end{array}\right.$$

Comprobamos si hay un mínimo con estos valores en $x = 3$. Recurrimos a la segunda derivada $C''(x) = 12x - 2A = 12x - 18 \Longrightarrow C''(3) = 36 - 18 = 18 > 0 \Longrightarrow x = 3$ es un mínimo relativo.

Problema 2 Se pide:

a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 7x + 6$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 5$.

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: $g(x) = \dfrac{4x^2 + 1}{2(x^2 - 7x + 6)}$

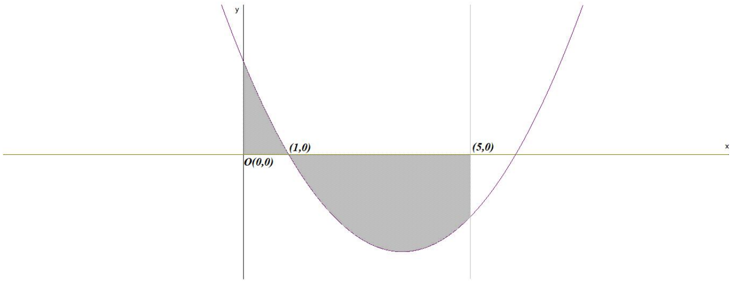
Solución:

a) $x^2 - 7x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 6$. El punto $x = 1$ se encuentra dentro del intervalo $[0, 5]$ de integración, luego tendremos dos recintos de integración S_1 en $[0, 1]$ y S_2 en $[1, 5]$.

$$S_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2 - 7x + 6)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\Big]_0^1 = \frac{17}{6}$$

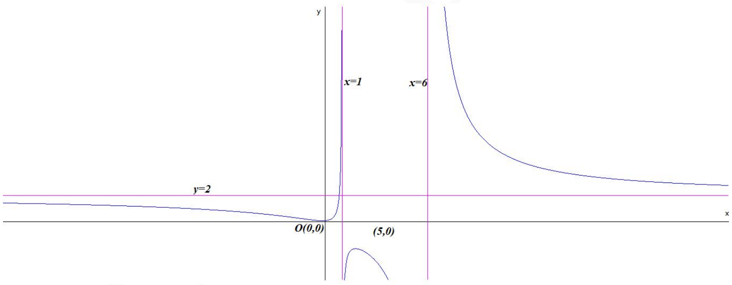
$$S_2 = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 (x^2 - 7x + 6)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\Big]_1^5 = -\frac{56}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \left|-\frac{17}{6}\right| + \left|\frac{56}{3}\right| = \frac{43}{2} = 21,5\ u^2$$



b) $x^2 - 7x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 6 \Longrightarrow \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1, 6\}$.
Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 1$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)} = \left[\dfrac{5}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)} = \left[\dfrac{5}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$
  En $x = 6$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 6^-} \dfrac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)} = \left[\dfrac{145}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 6^+} \dfrac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)} = \left[\dfrac{145}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$
- Horizontales: $y = 2$.
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)} = 2$$
- Oblícuas: No hay por haber horizontales.



Problema 3 Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcular a y b sabiendo que $f(x)$ tiene un punto crítico en el punto $x = 1$ y su gráfica pasa por el punto $(3, 0)$.

b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para $a = 3$ y $b = 3$.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + x \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$

$$\left\{\begin{array}{l} f(3) = 0 \Longrightarrow 27a + 9b + 3 = 0 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + 1 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/9 \\ b = -2/3 \end{array}\right.$$

b) $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x \Longrightarrow f'(x) = 9x^2 + 6x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$. En el intervalo $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right) \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ es creciente.

En el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ es creciente.

Luego la función es siempre creciente y en $x = -\dfrac{1}{3}$ no hay extremo relativo.

Problema 4 Consideremos la función a trozos siguiente

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^2 - 3x + 2 & \text{si} & x < 0 \\ e^{ax} + 1 & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

a) Calcular los valores de a qué f sea continua y derivable.

b) Para $a = 4$ calcular el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$.

Solución:

a) La función es continua y derivable en las dos ramas, falta analizar en $x = 0$.

☛ Estudiamos la continuidad en $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \left(x^2 - 3x + 2\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left(e^{ax} + 1\right) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Luego la función es continua para cualquier valor de a.

☛ Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2x - 3 & \text{si} & x < 0 \\ ae^{ax} & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(0^-) = -3 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Luego la función sea derivable en $x = 0 \Longrightarrow a = -3$.

La función es continua y derivable cuando $a = -3$

b) Para $a = 4$ en el intervalo $[1, 2]$ la función es $f(x) = e^{4x}+1$. Esta función es siempre positiva y, por tanto, no tiene puntos de corte con el eje OX.
$S = \displaystyle\int_1^2 \left(e^{4x} + 1\right)\, dx = \frac{1}{4}e^{4x} + x\Big]_1^2 = \frac{e^8 - e^4 + 4}{4} \simeq 732{,}59\ u^2$