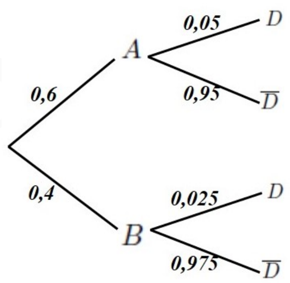
Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Abril 2023

Problema 1 Una fábrica de tornillos utiliza en su fabricación el 60 % de las veces la máquina A y el 40 % restante la B. La máquina A produce un 5 % de tornillos defectuosos y la B un 2,5 %.

a) Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.

b) Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina B.

Solución:
Sea A al suceso máquina A, B al suceso máquina B y D defectuoso.
Tenemos: $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$, $P(D|A) = 0,05$ y $P(D|B) = 0,025$.



a) $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) = 0,05 \cdot 0,6 + 0,025 \cdot 0,4 = 0,04$

b) $P(B|D) = \dfrac{P(D|B)P(B)}{P(D)} = \dfrac{0,025 \cdot 0,4}{0,04} = 0,25$

Problema 2 Se sortea un viaje a Japón entre los 240 mejores clientes de una agencia de viajes. De ellos, 144 son mujeres, 168 son personas con hijos y 90 son hombres con hijos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos?

b) Si la persona a la que le toca el viaje tiene hijos, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Solución:
Sea V al suceso "hombre", M al suceso "mujer" y H al suceso "con hijos".

$$P(M) = \frac{144}{240} = \frac{3}{5} = 0,6, \quad P(H) = \frac{168}{240} = \frac{7}{10} = 0,7, \quad P(V \cap H) = \frac{90}{240} = \frac{3}{8} = 0,375$$

	H	$\overline{H}$	Total
V	$0,375$		
M			$0,6$
Total	$0,7$		1

$\Longrightarrow$

	H	$\overline{H}$	Total
V	$0,375$	$0,025$	$0,4$
M	$0,325$	$0,275$	$0,6$
Total	$0,7$	$0,3$	1

a) $P(V \cap \overline{H}) = 0,025$

b) $P(M|H) = \dfrac{P(M \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0,325}{0,7} = 0,4643$

Problema 3 De dos sucesos A y B se sabe que satisfacen que $P(A) = 0,4$, $P(A \cup B) = 0,8$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,7$, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ representan los sucesos complementarios de los sucesos A y B, respectivamente. Se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

b) La probabilidad de que solo se verifique uno de los sucesos.

c) La probabilidad de que se verifique el suceso $\overline{B}$.

d) La probabilidad de que se verifique el suceso $\overline{A}|B$.

Solución:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,7 \Longrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0,7 = 0,3$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + P(B) - 0,3 = 0,8 \Longrightarrow$
$P(B) = 0,8 - 0,4 + 0,3 = 0,7$
$P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28 \neq P(A \cap B) \Longrightarrow A$ y B no son independientes.

b) $P(\text{sólo un suceso}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0,4 + 0,7 - 0,6 = 0,5$

c) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,7 = 0,3$

d) $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,7 - 0,3}{0,7} = 0,5714$

Problema 4 Se ha tomado una muestra de 16 pacientes tratados por un especialista y se ha observado que el tiempo de espera en su consulta, en minutos, ha sido de::

$8 \quad 9,2 \quad 10 \quad 8,5 \quad 12 \quad 9 \quad 11,3 \quad 7 \quad 8,5 \quad 8,3 \quad 7,6 \quad 9 \quad 9,4 \quad 10,5 \quad 8,9 \quad 6,8$

Supongamos que el tiempo de espera en esta consulta se distribuye según una ley Normal de varianza 4 y media desconocida.

a) Halle un intervalo de confianza al 97,5 % para estimar el tiempo medio de espera de los pacientes tratados por este especialista.

b) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar, con un nivel de confianza del 90 %, que el error cometido sea, a lo sumo, de 0,3 minutos.

Solución:

$$N(\mu; \sqrt{4}) = N(\mu; 2)$$

a) $n = 12$, $\overline{X} = 9$ y $NC = 0,975 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,025 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,0125$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,0125 = 0,9875 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 2,24$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow E = 2,24\frac{2}{\sqrt{16}} = 1,12$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} + E) = (9 - 1,12; 9 + 1,12) = (7,88; 10,12)$$

b) $E = 0,3$ y $NC = 0,9 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,1 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,05$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,05 = 0,95 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,645$

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,3 \Longrightarrow n \ge \left(\frac{1,645 \cdot 2}{0,3}\right)^2 = 120,268 \Longrightarrow n = 121$$

Problema 5 En una determinada comunidad autónoma se ha seleccionado una muestra aleatoria de 500 personas, de las que 190 leen el periódico habitualmente

a) Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que leen el periódico habitualmente en esa comunidad autónoma.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño muestral?

(Algunos valores de la función de distribución de la Normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

Solución:

$$\hat{p} = \frac{190}{500} = 0,38 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,62$$

a) $NC = 0,95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

$P(Z \le Z_{\alpha/2}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975 \Longrightarrow Z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96\sqrt{\frac{0,38 \cdot 0,62}{500}} = 0,0425$$

$IC = (\hat{p} - E, \hat{p} + E) = (0,38 - 0,0425; 0,38 + 0,0425) = (0,3375; 0,4225) = (33,75\,\%, 42,25\,\%)$

b) $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0,0425$ el tamaño muestral va en el denominador, si mantenemos sin variar los otros datos de la fórmula y sólo cambiamos el tamaño muestral tendremos: al aumentarlo se reduce el error y al disminuirlo aumenta el error.