Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Marzo 2023

Problema 1 Sea la función definida de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & \text{si} \quad x < 2 \\ 2x^2 - 10x & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

a) Halle el dominio de f.

b) Estudie la derivabilidad de f en $x = 2$.

c) Calcule la integral indefinida de la función $f(x) = 2x^2 - 10x$.

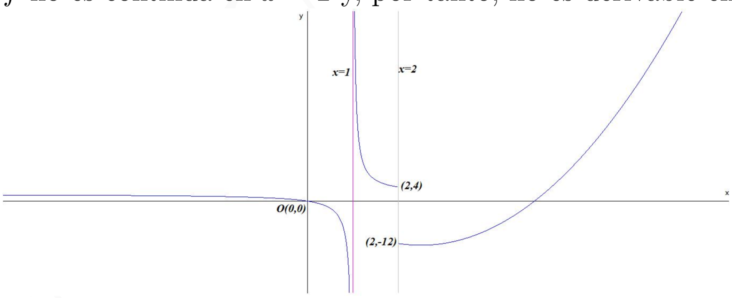
Solución:

a) En la rama $x < 2$ la función vale $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ y el denominador se anula en $x = 1$ que se encuentra dentro de la rama y, por tanto, ese punto no estará en el dominio de la función.
En la rama $x \geq 2$ la función vale $f(x) = 2x^2 + 10x$, se trata de un polinomio y, por tanto, su dominio es la rama completa.
En conclusión $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

b) Para estudiar la derivabilidad de f en $x = 2$ primero hay que comprobar si es continua en ese punto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{2x}{x-1} = 4 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} (2x^2 - 10x) = -12 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) \Longrightarrow$$

f no es continua en $x = 2$ y, por tanto, no es derivable en ese punto.



c) $$\int (2x^2 - 10x)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 5x^2 + C$$

Problema 2 Sea $C(x)$ la función de costes de una empresa, expresada en miles de euros, donde x mide, en toneladas, la cantidad producida. De esta función se sabe que $C'(x) = 7x^2 - 8x + 1$

a) Determine la cantidad a producir por la empresa para minimizar el coste.

b) Sabiendo que si no hay producción el coste asciende a 30000 euros, obtenga $C(x)$. ¿Cuál es el mínimo coste de producción para la empresa?

c) Si la cantidad a producir está entre 0 y 1,2 toneladas, ¿cuál sería la producción que supondría un mayor coste a la empresa?

Solución:

a) $C'(x) = 7x^2 - 8x + 1 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{7}$ y $x = 1$

	$(0, 1/7)$	$(1/7, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(0, 1/7) \cup (1, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(1/7, 1)$, tiene un mínimo local en $x = 1$ y un máximo local en $x = 1/7$.
Luego el coste mínimo sería con la producción de una tonelada. Este valor habría que compararlo con $C(0)$.

b) Ahora tenemos $C(0) = 30$ euros.

$$C(x) = \int (7x^2 - 8x + 1)\, dx = \frac{7x^3}{3} - 4x^2 + x + K$$

Imponiendo $C(0) = K = 30 \Longrightarrow C(x) = \dfrac{7x^3}{3} - 4x^2 + x + 30.$

Tenemos $C(1) = \dfrac{88}{3} < C(0) \Longrightarrow$ en $x = 1$ hay un mínimo absoluto de 29333 euros.

c) En $x = \dfrac{1}{7}$ hay un máximo local con un coste de 30068 euros. en la fase inicial era de 30000 euros y cuando $x = 1,2$ es de $C(1,2) = 29,472$, es decir, de 29472 euros. Luego el máximo se produce en el máximo local en $x = \dfrac{1}{7}$.

Problema 3 Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 16}{x + 3}$$

a) Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$
Asíntotas:

- Verticales en $x = -3$:

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{2x^2-16}{x+3} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{2x^2-16}{x+3} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2x^2-16}{x+3} = -\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{2x^2-16}{x+3} = +\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^2-16}{x^2+3x} = 2$$

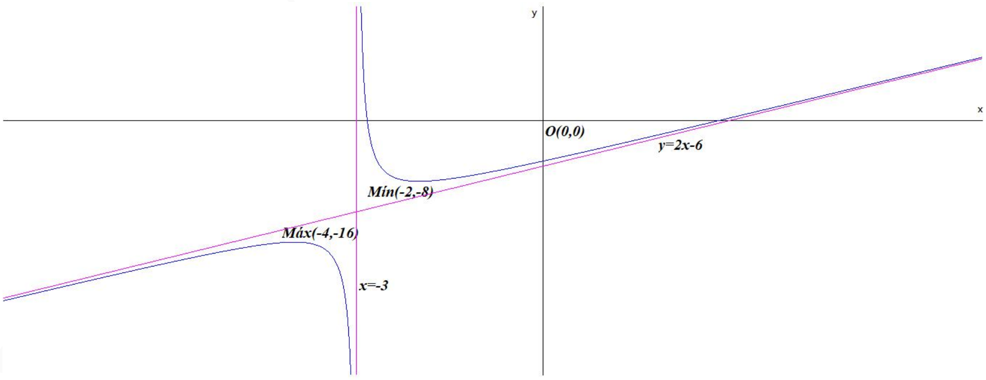
$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty}\left(\frac{2x^2-16}{x+3} - 2x\right) = \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{-16-6x}{x+3} = -6$$

$$y = 2x - 6$$

b) $f(x) = \dfrac{2(x^2+6x+8)}{(x+3)^2} = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = -4$.

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-4)\cup(-2,\infty)$ y decreciente en $(-4,-3)\cup(-3,-2)$.
La función tiene un máximo relativo en el punto $(-4,-16)$ y un mínimo relativo en el $(-2,-8)$



Problema 4 La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en $(0, -3)$ y la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ es 6. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

Solución:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = -3 \Longrightarrow c = -3 \\ f'(0) = 0 \Longrightarrow b = 0 \\ f'(-1) = 6 \Longrightarrow -2a + b = 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{array}\right.$$

$$f(x) = -3x^2 - 3$$