Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Febrero 2023

Problema 1 Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función f en su dominio.

b) Estudie la monotonía de la función f y calcule el mínimo.

c) Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

Solución:

a) En la rama $x < 0$ la función vale $f(x) = 2^{x+1}$ es una exponencial y es continua y derivable en toda la rama.
En la rama $x \geq 0$ la función vale $f(x) = x^2 - 2x$ es un polinomio y es continua y derivable en toda la rama.
En $x = 0$ la función vale cero y tenemos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

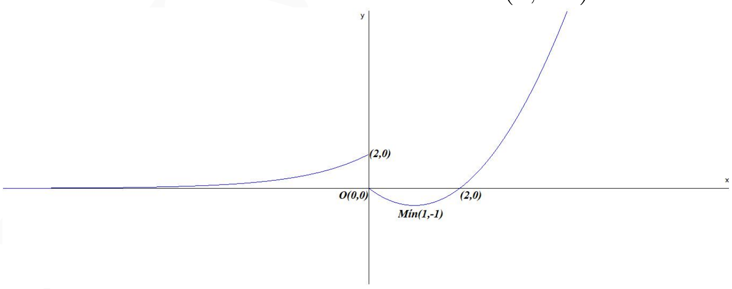
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} 2^{x+1} = 2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} (x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

f no es continua en $x = 0$ y, por tanto, no es derivable en ese punto.
En conclusión: la función f es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) En la rama $x < 0$ tenemos $f'(x) = 2^{x+1}\ln 2 > 0 \Longrightarrow f$ es siempre creciente y no tiene extremos relativos en esta rama.
En la rama $x \geq 0$ tenemos $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(1,\infty)$, y decreciente en el intervalo $(0,1)$, tiene un mínimo relativo en $x = 1 \Longrightarrow (1,-1)$.



c)

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} 2^{x+1}\,dx + \int_{0}^{2} (x^2-2x)\,dx = \left.\frac{2^{x+1}}{\ln 2}\right]_{-2}^{0} + \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} = \frac{3}{2\ln 2} - \frac{4}{3} \simeq 0,83071$$

Problema 2 El diámetro de cierta variedad de manzana oscila entre los 2 y los 5 cm. El precio (en céntimos de euro), $P(x)$, que se le paga al agricultor por un kilogramo de estas manzanas viene determinado por su diámetro, x, de acuerdo con la siguiente función:

$$P(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 30 \quad 2 \le x \le 5$$

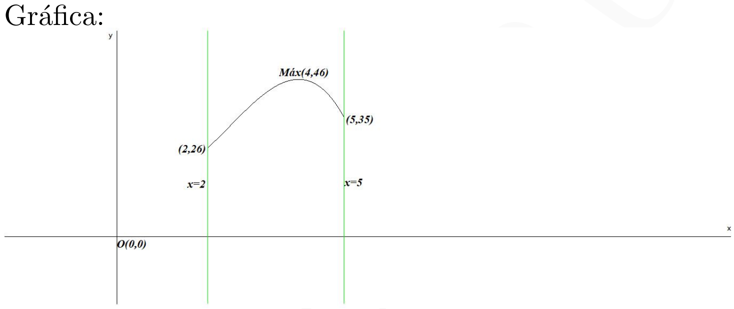
Determinar para qué diámetros se alcanzan los precios máximo y mínimo de las manzanas. ¿Cuáles son estos precios máximo y mínimo? Razonar las respuestas.

Solución:

$P(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 30 \Longrightarrow P'(x) = -6x^2 + 30x - 24 = 0 \Longrightarrow x = 1$(fuera del dominio) y $x = 4$.

	$(2,4)$	$(4,5)$
$P'(x)$	$+$	$-$
$P(x)$	crece $\nearrow$	decrece $\searrow$

La función crece en el intervalo $(2,4)$ y decrece en el intervalo $(4,5)$.
La función tiene un máximo relativo en $(4,46)$.
Tenemos: $P(2) = 26$ y $P(5) = 35$. Luego el precio máximo de 46 céntimos de euro se obtiene con manzanas de 4 cm de diámetro. El precio mínimo de 26 céntimos de euro se obtiene con manzanas de 2 cm de diámetro.
Gráfica:



Problema 3 La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tiene un punto de inflexión en $(-1,6)$ y en el punto de abscisa $x = -2$ la pendiente de la recta tangente es -4: Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c.

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \Longrightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(-1) = 6 \Longrightarrow -a + b - c = 6 \\ f''(-1) = 0 \Longrightarrow -6a + 2b = 0 \\ f'(-2) = -4 \Longrightarrow 12a - 4b + c = -4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{array}\right.$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$$

Problema 4 Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4}$

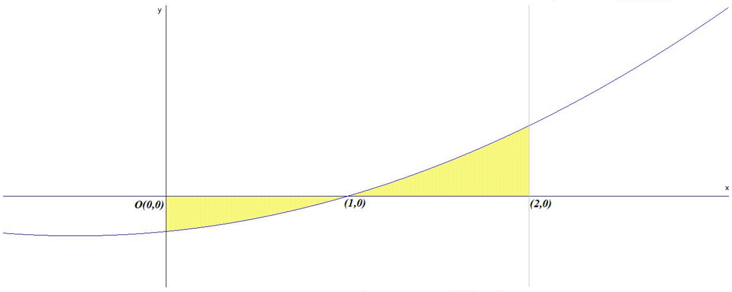
Solución:

a) $x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$ y $x = 1$. El punto $x = 1$ se encuentra dentro del intervalo $[0, 2]$ de integración, luego tendremos dos recintos de integración S_1 en $[0, 1]$ y S_2 en $[1, 2]$.

$$S_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2+x-2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1 = -\frac{7}{6}$$

$$S_2 = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2+x-2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \frac{11}{6}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \left|-\frac{7}{6}\right| + \left|\frac{11}{6}\right| = \frac{18}{6} = 3\ u^2$$



b) $x^2 - 3x - 4 = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 4 \Longrightarrow \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$.
Asíntotas:

- Verticales: En $x = -1$:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

En $x = 4$:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 4^-} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \left[\frac{33}{0^-}\right] = -\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 4^+} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \left[\frac{33}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- ☛ Horizontales: $y = 2$.

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = 2$$

- ☛ Oblícuas: No hay por haber horizontales.