Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2022

Problema 1 *(2,5 puntos)*Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$.

b) Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que

$$A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$$

Solución:

a) $AX + B = A^2C \Longrightarrow AX = A^2C - B \Longrightarrow X = A^{-1}(A^2C - B) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -5/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -5/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -16 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -5/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -17 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & 19/3 \\ -13/3 & 10/3 \\ 10/3 & -13/3 \end{pmatrix}$$

b) $\underset{3\times 3}{A} \cdot \underset{a\times b}{P^t} + \underset{3\times 2}{C} \Longrightarrow a = 3 \text{ y } b = 2 \Longrightarrow \underset{3\times 2}{P^t} \Longrightarrow \underset{2\times 3}{P}$

$\underset{3\times 2}{C} \cdot (\underset{c\times d}{Q} \cdot \underset{3\times 2}{B}) \Longrightarrow c = 2 \text{ y } d = 3 \Longrightarrow \underset{2\times 3}{Q}$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Para poder llevar a cabo la última obra que le ha encargado, una empresa de construcción necesita adquirir 400 kg de cemento, 150 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. Antes de hacer la compra del material consulta precios e dos suministradores, A y B. El suministrador A le ofrece un precio de venta total de 9800€. El suministrador B, que está en liquidación, le ofrece importantes descuentos. En concreto, baja el precio del cemento a la mitad del que le ofrece el suministrador A, el del ladrillo a una tercera parte y el del azulejo a una cuarta parte, lo que supone un ahorro de 6400€

con respecto al precio total de venta ofrecido por el suministrador A. Se sabe, además, para el suministrador A, que el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos.

a) Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (en €/kg) del cemento, el ladrillo y el azulejo en el suministrador A.

b) Resuélvalo.

Solución:

a) Sea x el precio del cemento del suministrador A, y el precio del ladrillo del suministrador A y z el precio del azulejo del suministrador A.

$$\begin{cases} 400x + 150y + 120z = 9800 \\ 400\dfrac{x}{2} + 150\dfrac{y}{3}y + 120\dfrac{z}{4} = 9800 - 6400 \\ z = 2(x+y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 40x + 15y + 12z = 980 \\ 20x + 5y + 3z = 340 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

b) $$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 20 & 5 & 3 & 340 \\ 40 & 15 & 12 & 980 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 10F_1 \\ F_3 - 20F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 13 & 340 \\ 0 & -25 & 32 & 980 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 5F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -15 & 13 & 340 \\ 0 & 0 & 31 & 1240 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2y + z}{2} = 8€/\text{kg} \\[2ex] y = \dfrac{340 - 13z}{-15} = 12€/\text{kg} \\[2ex] z = \dfrac{1240}{31} = 40€/\text{kg} \end{cases}$$

sistema compatible determinado. Solución única.

Problema 3 *(2,5 puntos)*Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Sea A^T la matriz traspuesta de A, indicar razonadamente cuáles de los producto de matrices $A \cdot B$, $B \cdot A^T$, $C \cdot D$ y $D \cdot A$ se pueden calcular. Determinar las dimensiones de las matrices resultantes en aquellos casos en los que sea posible realizar dichos productos.

b) Hallar la matriz X que es solución de la ecuación $X \cdot B = D$.

Solución:

a) ☛ $\underset{3\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 2}{B} = \underset{3\times 2}{A \cdot B}$

- ☛ $\underset{2\times2}{B} \cdot \underset{2\times3}{A^T} = \underset{2\times3}{B \cdot A^T}$
- ☛ $\underset{1\times2}{C} \cdot \underset{2\times2}{D} = \underset{1\times2}{C \cdot D}$
- ☛ $\underset{2\times2}{D} \cdot \underset{3\times2}{A}$ no se pueden multiplicar.

b) $XB = D \Longrightarrow X = DB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/7 & -2/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar a y b para que la matriz A conmute con B.

Solución:

$$AB = BA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+1 = a+b \\ b+1 = a \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$