Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2022

Problema 1 *(2,5 puntos)*Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.

b) Para $a = 2$, calcule la matriz inversa de A.

c) Para Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$

Solución:

a) $|A| = a^2 - 4a + 3 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = 3 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \ \forall\, a \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$

b) Si $a = 2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

c) $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C \Longrightarrow X \cdot A = B^t \cdot C - I_3 \Longrightarrow X = (B^t \cdot C - I_3)A^{-1} =$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & --1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & -21 & 19 \\ 16 & 12 & -11 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*La dueña de una cafetería ha comprado café y leche por un importe total de 2500 euros. Si vende todos estos productos, ganando un 80 % con el café y un m % con la leche, obtiene por ellos un importe total de $2900 + 20m$ euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el coste de compra del café y la leche.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuánto costó el café si el beneficio de venta de la leche es del 20 %?

Solución:

a) Sea x el coste del café e y el coste de la leche.

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 2500 \\ \dfrac{80}{100}x + x + \dfrac{m}{100}y + y = 2900 + 20m \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = 2500 \\ 180x + (m + 100)y = 2000(m + 145) \end{array}\right.$$

b) $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 180 & m+100 & 2000(m+145) \end{array} \right)$ con $|A| = m - 80 = 0 \Longrightarrow m = 80$

- ☛ Si $m \neq 80 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incognitas y el sistema es compatible determinado (solución única)
- ☛ Si $m = 80$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 180 & 80+100 & 2000(80+145) \end{array} \right) \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2500 \\ 1 & 1 & 2500 \end{array} \right) \Longrightarrow$ sistema compatible indetrminado y tiene infinitas soluciones.
- ☛ Si $m = 20$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 2500 \\ 180x + 120y = 330000 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2500 \\ 3x + 2y = 5500 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 500€ \\ y = 2000€ \end{array} \right.$$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Se pide:

a) Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $AX = B$ y $B = XA$? ¿De qué propiedad estamos hablando?

b) Si la dimensión de la matriz M es $3 \times m$, la dimensión de la matriz N es 2×5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto $M \cdot N \cdot P$? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante?

c) Para las matrices $C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $XC - D^2 = \frac{1}{3}E^T$

Solución:

a) No tiene por qué cumplirse $AX = XA$ dado que las matrices no cumplen la propiedad conmutativa. Esto no quiere decir que en ciertos casos si se cumpla, pero no de forma general.

b) $\underset{3\times m}{M} \cdot \underset{2\times 5}{N} \cdot \underset{p\times p}{P} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 2 \\ p = 5 \end{array} \right.$
La matriz resultante tiene dimensión 3×5.

c) $XC - D^2 = \frac{1}{3}E^T \Longrightarrow XC = \frac{1}{3}E^T + D^2 \Longrightarrow X = \left(\frac{1}{3}E^T + D^2\right) C^{-1} =$

$$\left[\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2 \right] \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 28 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81 & -296 \\ 19 & 68 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Sea A la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ x & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

b) Calcular la inversa de A para $x = 0$.

Solución:

a) $|A| = 1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

b) Si $x = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$