Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Diciembre 2022

Problema 1 Dado el sistema lineal: $\left\{\begin{array}{c} (m+1)x = m-2 \\ 2x+y=-3 \\ 3x-2y+mz=-8 \end{array}\right.$. Se pide:

a) Exprese el sistema anterior en forma matricial ($AX = B$) y determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.

b) ¿Existe algún valor del valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.

c) Para $m = 1$, calcule $X = A^{-1}B$, siendo A, B las matrices del apartado a)

Solución:

a) $\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$

$|A| = m(m+1) = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = -1$

Si $m \in \mathbb{R} - \{0, -1\} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \Longrightarrow AX = B$ tiene solución única: $X = A^{-1}B$

b) Si $m = 0 \Longrightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$

$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado

$\left\{\begin{array}{l} 2x + y = -3 \\ 3x - 2y = -8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array}\right.$

Si $m = -1 \Longrightarrow \overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ sistema incompatible

c) Si $m = 1 : A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ -21/2 \end{pmatrix}$

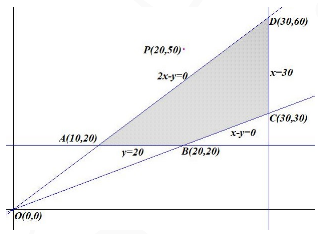
Problema 2 En un almacén hay lavadoras y frigoríficos. Por necesidades del mercado el número de frigoríficos debe ser mayor o igual que el de lavadoras, pero no puede superar el doble del de lavadoras. Se necesitan al menos 20 frigoríficos y no hay más de 30 lavadoras disponibles para tener en el almacén. Por cada lavadora se obtiene un beneficio de 200 euros y por cada frigorífico se obtiene un beneficio de 250 euros.

a) ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo se pueden tener en el almacén para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían tener 20 lavadoras y 50 frigoríficos?

b) ¿Cuántos electrodomésticos de cada tipo habría que tener para maximizar el beneficio al vender todo lo del almacén? ¿y para minimizar el número de lavadoras?

Solución:
Sea x el nº de lavadoras e y el nº de frigoríficos.

a) $\left\{\begin{array}{l} y \geq x \\ y \leq 2x \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \\ x \geq 0 \end{array}\right.$

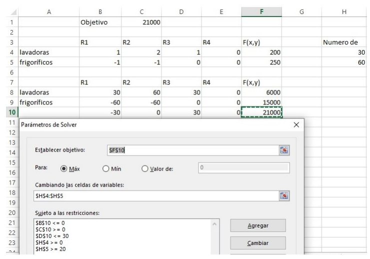


Los vértices a estudiar serán: $A(10,20)$, $B(20,20)$, $C(30,30)$ y $D(30,60)$.
El punto $P(20,50)$ se encuentra fuera de la región factible. Luego no se trata de una solución posible.

b) $f(x,y) = 200x + 250y$

$\left\{\begin{array}{l} f(10,20) = 7000 \\ f(20,20) = 9000 \\ f(30,30) = 13500 \\ f(30,60) = 21000 \end{array}\right. \Longrightarrow$

Solución por solver :



Se deberán tener 30 lavadoras y 60 frigoríficos con un beneficio máximo de 21000€.
Si se desea minimizar el número de lavadoras tiene que tener 10 lavadoras y 20 frigoríficos, en este caso el beneficio es de 7000€.