Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Febrero 2023

Problema 1 *(2,5 puntos)*Dados dos planos $\pi : x+y+z=3$, $\pi' : x+y=3$ y el punto $A(2,1,6)$

a) Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

b) Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

c) Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π.

Solución:

a) $r : \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,0) \\ P_r(0,3,0) \end{cases}$

b) Calculamos la recta $t \perp \pi$ que pase por A:

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_\pi}=(1,1,1) \\ P_t=A(2,1,6) \end{cases} \Longrightarrow t : \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=6+\lambda \end{cases}$$

Calculamos el punto P de corte de t con π:

$$(2+\lambda)+(1+\lambda)+(6+\lambda)=3 \Longrightarrow 3\lambda=-6 \Longrightarrow \lambda=-2$$

Sustituyendo en $t \Longrightarrow P(0,-1,4)$

c) P es el punto medio entre A y A'

$$\frac{A+A'}{2}=P \Longrightarrow A'=2P-A=(0,-2,8)-(2,1,6)=(-2,-3,2)$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=1 \\ z=-\alpha \end{cases}$, s perpendicular a r y el vector $\overrightarrow{v}=(1,1,1)$.

a) Calcula $\overrightarrow{v_r}$ un vector director de r.

b) Calcula un vector $\overrightarrow{u}$ director de s tal que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v_r}$ es proporcional a $\overrightarrow{v}$.

c) Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s', siendo $s' \equiv x-1=\dfrac{y-1}{-2}=z$

Solución:

a) $\overrightarrow{v_r} = (1, 0, -1)$

b) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 1)$

c) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (1, 0, -1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{array} \right., \; s' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v_{s'}} = (1, -2, 1) \\ P_{s'}(1, 1, 0) \end{array} \right.$

Como $P_r(1, 1, 0) = P_{s'}(1, 1, 0)$ las dos rectas tienen un punto en común y como Rango$\left(\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{v_{s'}} = (1, -2, 1) \end{array} \right) = 2 \Longrightarrow r$ y s' se cortan.

Calculamos el plano π que las contiene:

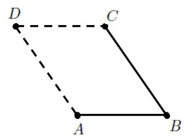
$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{v_{s'}} = (1, -2, 1) \\ P_r(1, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : -2x - 2y - 2z + 4 = 0 \Longrightarrow \pi : x + y + z - 2 = 0$$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (1, 6, 1)$, $C = (-2, -1, 5)$ y $E = (-1, 1, 1)$

a) Calcula ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

b) Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono $ABCD$ sea un paralelogramo y el área de $ABCD$.



c) Halla ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por E.

Solución:

a)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 6, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, -1, 4) \\ A(1, 0, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 6(4x + 3z - 7) = 0 \Longrightarrow \pi : 4x + 3z - 7 = 0$$

b) $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (1, 0, 1) + (-3, 7, 4) = (-2, 7, 5)$

$$S = \left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right| = | \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} | = |6(4, 0, 3)| = 6\sqrt{25} = 30 \; u^2$$

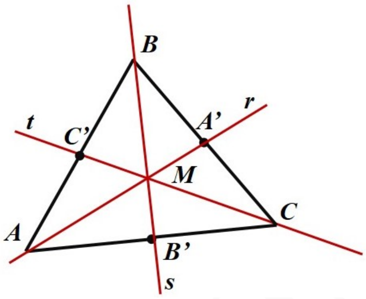
c) $r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (4, 0, 3) \\ P_r = E(-1, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 4\lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + 3\lambda \end{array} \right.$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértices $A = (-1, 2, 3)$, $B = (3, -4, 1)$, $C = (1, -4, 5)$.

a) Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.

b) Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución:



a) $A' = \dfrac{B+C}{2} = (2, -4, 3)$, $B' = \dfrac{A+C}{2} = (0, -1, 4)$, $C' = \dfrac{A+B}{2} = (1, -1, 2)$.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{AA'} = (2, -4, 3) - (-1, 2, 3) = 3(1, -2, 0) \\ P_r = A(-1, 2, 3) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 3 \end{array} \right.$$

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{BB'} = (0, -1, 4) - (3, -4, 1) = 3(-1, 1, 1) \\ P_s = B(3, -4, 1) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \mu \\ y = -4 + \mu \\ z = 1 + \mu \end{array} \right.$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{CC'} = (1, -1, 2) - (1, -4, 5) = 3(0, 1, -1) \\ P_t = C(1, -4, 5) \end{array} \right. \qquad t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -4 + \beta \\ z = 5 - \beta \end{array} \right.$$

b) Corte de r con s:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda = 3 - \mu \\ y = 2 - 2\lambda = -4 + \mu \\ z = 3 = 1 + \mu \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \mu = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow M(1, -2, 3)$$

Corte de r con t:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda = 1 \\ y = 2 - 2\lambda = -4 + \beta \\ z = 3 = 5 - \beta \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \beta = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow M(1, -2, 3)$$

Corte de s con t:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 - \mu = 1 \\ y = -4 + \mu = -4 + \beta \\ z = 1 + \mu = 5 - \beta \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \beta = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow M(1, -2, 3)$$

Las tres rectas se cortan en el punto $M(1, -2, 3)$.