Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2023

Problema 1 *(2,5 puntos)*Se pide:

a) Escribe la ecuación del plano que contiene a las rectas r_1 y r_2, y además pasa por el punto $(-1, 2, 1)$, siendo

$$r_1 \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

b) Dado el vector $\overrightarrow{v} = (2, k, 2k)$, calcula el valor $k \in \mathbb{R}$ para que $\overrightarrow{v}$ y los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 sean linealmente dependientes.

Solución:

a) $r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (3, 1, 1) \\ P_{r_1}(0, -2, 0) \end{cases} \Longrightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}$

$r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (6, -2, 1) \\ P_{r_2}(-1, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$

$\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}} = (0, -2, 0) - (-1, 0, 0) = (1, -2, 0)$ y estudiamos la posición relativa de r_1 y r_2:

$\left[\overrightarrow{P_{r_2}P_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow r_1$ y r_2 se cruzan y, por tanto, no existe un plano que contenga a las dos. (Para que ese plano existiese tendrían que cortarse o ser paralelas)

Parece ser un error de diseño del problema. Si que se podría calcular la ecuación de un plano π paralelo a estas rectas que contenga al punto $P(-1, 2, 1)$

$u_\pi = \overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(1, 1, -4) \Longrightarrow \pi : x + y - 4z + \lambda = 0$, como $P \in \pi \Longrightarrow -1 + 2 - 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow \pi : x + y - 4z + 3 = 0$

b) $[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}] = \begin{vmatrix} 2 & k & 2k \\ 3 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 21k = 0 \Longrightarrow k = \dfrac{2}{7}$

Problema 2 *(2,5 puntos)*Sea pide:

a) Dados los vectores $\overrightarrow{v_1} = a\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2} + 3\overrightarrow{u_3}$, $v_2 = -\overrightarrow{u_1} + a\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$, determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_1}$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1.

b) Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$ siendo

$$\overrightarrow{v_1}=(1,0,-2),\quad \overrightarrow{v_2}=(3,1,0)$$

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_3}=1$ ya que tienen módulo 1.
$\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_3}=\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_3}=0$ ya que son ortogonales.
$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=(a\overrightarrow{u_1}-2\overrightarrow{u_2}+3\overrightarrow{u_3})\cdot(-\overrightarrow{u_1}+a\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3})=$
$-a\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_1}+a^2\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}+a\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_3}+2\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_1}-2a\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_2}-2a\overrightarrow{u_2}\overrightarrow{u_3}-3\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_1}+$
$3a\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_2}+3\overrightarrow{u_3}\overrightarrow{u_3}=-a-2a+3=0\Longrightarrow a=1$

b) $V=\dfrac{1}{6}|[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}]|=\dfrac{1}{6}|\begin{vmatrix}\overrightarrow{v_1}\\ \overrightarrow{v_2}\\ \overrightarrow{v_3}\end{vmatrix}|=\dfrac{1}{6}|\begin{vmatrix}\overrightarrow{v_1}\\ \overrightarrow{v_2}\\ \overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\end{vmatrix}|=\dfrac{1}{6}\cdot 0=0$ la tercera fila del determinante es combinación lineal de la primera y la segunda y, por tanto, el determinante vale cero.

Problema 3 *(2,5 puntos)*El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.
Solución: $D\in OY\Longrightarrow D(0,a,0)$

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-3,0,-1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,0,2)\\ \overrightarrow{AD}=(-1,a-1,-1)\end{array}\right.\Longrightarrow$$

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right]\right|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix}-3&0&-1\\-1&0&2\\-1&a-1&-1\end{vmatrix}|=\frac{1}{6}|7(a-1)|=10\Longrightarrow$$

☛ $\dfrac{7}{6}(a-1)=10\Longrightarrow a=\dfrac{67}{7}\Longrightarrow D_1\left(0,\dfrac{67}{7},0\right)$

☛ $\dfrac{7}{6}(a-1)=-10\Longrightarrow a=-\dfrac{53}{7}\Longrightarrow D_2\left(0,-\dfrac{53}{7},0\right)$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Sea r la recta que pasa por los puntos $A(1,0,1)$ y $B(2,1,2)$ y s la recta $s:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$

a) Indica la posición relativa de r y s.

b) Calcula un plano paralelo a r y que contiene a s.

c) Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

$$r:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{AB}=(1,1,1)\\ P_r=A(1,0,1)\end{cases} \text{ y } s:\begin{cases}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,1)\\ P_s(2,2,0)\end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_rP_s}=(1,2,-1)$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4\neq 0\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) $$\pi:\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(1,1,1)\\ \overrightarrow{u_s}=(1,-1,1)\\ P_s(2,2,0)\end{cases}\Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-2&y-2&z\\1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=0\Longrightarrow$$

$$\pi: x-z-2=0$$

c) $$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}|=|(2,0,-2)|=2\sqrt{2}$$