Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2022

Problema 1 *(2,5 puntos)*Se consideran los vectores $\overrightarrow{u} = (-1, 2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$.

a) Calcula a y b para que el vector $\overrightarrow{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas.

Solución:

a) $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 5, -4) = k(1, a, b) \Longrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{5}{2} \\ b = 2 \end{cases}$

b) Hacemos dibujo de la situación:

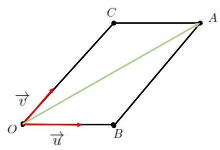
$\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{u} = (-\lambda, 2\lambda, 3\lambda) \Longrightarrow B(-\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$

$\overrightarrow{OC} = \mu\overrightarrow{v} = (2\mu, 0, -\mu) \Longrightarrow C(2\mu, 0, -\mu)$

Tenemos $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OB} \Longrightarrow (-4, 4, 7) - (2\mu, 0, -\mu) = (-\lambda, 2\lambda, 3\lambda) \Longrightarrow$

$(-4 - 2\mu, 4, 7 + \mu) = (-\lambda, 2\lambda, 3\lambda) \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow$

$(-4 - 2\mu, 4, 7 + \mu) = (-2, 4, 6) \Longrightarrow \mu = -1$. En conclusión: $\lambda = 2$ y $\mu = -1$.



Los vértices son $O(0, 0, 0)$, $A(-4, 4, 7)$, $B(-2, 4, 6)$ y $C(-2, 0, 1)$

(A la misma conclusión se llega haciendo $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$)

Problema 2 *(2,5 puntos)*Considera la recta $r \equiv x - 2 = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ así como la recta s determinada por el punto $P(1, 2, 3)$ y el vector director $\overrightarrow{v} = (1 + a, -a, 3a)$.

a) Calcula a para que las rectas r y s se corten.

b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares.

Solución:

$$r : x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 2) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1 + a, -a, 3a) \\ P_s(1, 2, 3) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + (1 + a)\mu \\ y = 2 - a\mu \\ z = 3 + 3a\mu \end{cases}$$

a) Hacemos:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2+\lambda = 1+(1+a)\mu \\ y = -\lambda = 2-a\mu \\ z = 1+2\lambda = 3+3a\mu \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -8 \\ \mu = -1 \\ a = 6 \end{array}\right.$$

Luego si $a = 6$ las dos rectas se cortan y, sustituyendo en cualquiera de las rectas, tenemos el punto de corte de ambas rectas $P'(-6, 8, -15)$

b) $r \perp s \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_s} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = 0$

$$\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 2) \cdot (1+a, -a, 3a) = 1+a+a+6a = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{8}$$

Problema 3 *(2,5 puntos)*Considera las rectas $r \equiv x+1 = y-a = -z$ y $s \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{array}\right.$

a) Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por $P(8, -7, 2)$ y que contiene a la recta s.

Solución:

$$r: x+1 = y-a = -z \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} x = -1+\mu \\ y = a+\mu \\ z = -\mu \end{array}\right. \Longrightarrow r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ P_r(-1, a, 0) \end{array}\right.$$

$$s: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2, 0, -1) \\ P_s(5, -3, 2) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{array}\right.$$

a) Hacemos:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1+\mu = 5+2\lambda \\ y = a+\mu = -3 \\ z = -\mu = 2-\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -8 \\ \mu = -10 \\ a = 7 \end{array}\right.$$

Luego si $a = 7$ las dos rectas se cortan y, sustituyendo en cualquiera de las rectas, tenemos el punto de corte de ambas rectas $P'(-11, -3, 10)$

b) $$\pi: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP} = (3, -4, 0) \\ \overrightarrow{u_s} = (2, 0, -1) \\ P_s(5, -3, 2) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} x-5 & y+3 & z-2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi: -4x - 3y - 8z + 27 = 0 \Longrightarrow \pi: 4x + 3y + 8z - 27 = 0$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*Sea el plano $\pi \equiv x+y-z = 2$ y la recta $r \equiv x = \dfrac{y}{3} = z-1$.

a) Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r.

b) Dado el punto $Q(2, 6, 3)$, halla su simétrico respecto del plano π.

Solución:

$$r: x = \frac{y}{3} = z - 1 \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 3, 1) \\ P_r(0, 0, 1) \end{array} \right.$$

a) Sustituimos r en $\pi \Longrightarrow \lambda + 3\lambda - 1 - \lambda = 2 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P(1, 3, 2)$ La recta r corta al plano π en el punto $P(1, 3, 2)$.

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $Q \in t$:

$$t: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, -1) \\ P_t = Q(2, 6, 3) \end{array} \right. \Longrightarrow t: \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte Q' de t con π:

$$(2 + \lambda) + (6 + \lambda) - (3 - \lambda) = 2 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow Q'(1, 5, 4)$$

- Q' es el punto medio entre Q y el punto Q'' que buscamos:

$$\frac{Q + Q''}{2} = Q' \Longrightarrow Q'' = 2Q' - Q = (2, 10, 8) - (2, 6, 3) = (0, 4, 5)$$