Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Diciembre 2022

Problema 1 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (m, 3, m)$, $\overrightarrow{v} = (-m, 2, 0)$ y $\overrightarrow{w} = (2, 5, m)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:
$$\begin{vmatrix} m & 3 & m \\ -m & 2 & 0 \\ 2 & 5 & m \end{vmatrix} = -4m = 0 \Longrightarrow m = 0$$

Si $m = 0$ los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

a) Calcular m para que los vectores $\overrightarrow{u} = (m, 2, -m-2)$ y $\overrightarrow{v} = (3, m+2, -1)$ sean perpendiculares.

b) Encontrar un vector perpendicular $\overrightarrow{u} = (1, 2, -3)$ y a $\overrightarrow{v} = (1, 0, -1)$ que tenga módulo 5.

c) Decidir si los vectores $\overrightarrow{u} = (1, 5, -2)$ y $\overrightarrow{v} = (5, 1, 5)$ son perpendiculares.

Solución:

a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3m + 2m + 4 + m + 2 = 0 \Longrightarrow m = -1$

b)
$$\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2(1, 1, 1) \Longrightarrow |\overrightarrow{w}| = 2\sqrt{3}$$
$$\overrightarrow{t} = \frac{5}{2\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(\frac{5\sqrt{3}}{6}, \frac{5\sqrt{3}}{6}, \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$$

c) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5 + 5 - 10 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Problema 3 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (1, 3, -1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1, 0)$ y $\overrightarrow{w} = (3, 3, 4)$. Calcular:

a) Volumen de paralelepípedo que determinan.

b) Área de la base determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

c) Altura del paralelepípedo.

d) Volumen del tetraedro que determinan.

e) Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

f) Altura del tetraedro.

Solución:

a)

$$V_p = |\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}| = |-23| = 23\ u^3$$

b)

$$S_p = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = |(1, -2, -5)| = \sqrt{30}\ u^2$$

$$S_p = |\overrightarrow{v}| \cdot h_p \Longrightarrow h_p = \sqrt{6}\ u$$

c)

$$V_p = S_p \cdot H_p \Longrightarrow H_p = \frac{23\sqrt{30}}{30}\ u$$

d)

$$V_t = \frac{23}{6}\ u^3$$

e)

$$S_t = \frac{\sqrt{30}}{2}\ u^2,\ \ h_t = h_p = \sqrt{6}\ u$$

f)

$$H_t = H_p = \frac{23\sqrt{30}}{30}\ u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(-2, 0, -3)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(5, 6, 9)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

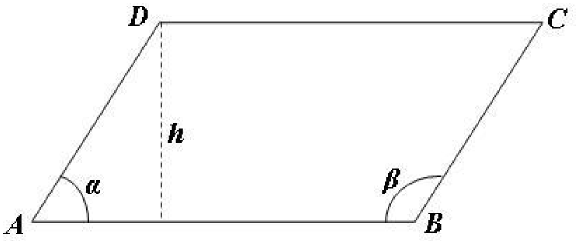
a) Encontrar el 4º vértice D.

b) Calcular la longitud de sus lados.

c) Calcular sus ángulos y su centro.

d) Calcular el punto simétrico de A respecto de C.

e) Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.



Solución

a) $D = A + \overrightarrow{BC} = (-2,0,-3) + (2,5,9) = (0,5,6)$.

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(5,1,3)| = \sqrt{35}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2,5,9))| = \sqrt{110}$

c)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \frac{42}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{110}} \Longrightarrow \alpha = 47^\circ 23' 56'' \text{ y } \beta = 132^\circ 36' 4''$$

El centro es $M\left(\frac{3}{2}, 3, 3\right)$

d) $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (12, 12, 15)$

e)

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(7,6,12) = \left(\frac{7}{3}, 2, 4\right)$$

$$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-2,0,-3) + \left(\frac{7}{3}, 2, 4\right) = \left(\frac{1}{3}, 2, 1\right)$$

$$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{1}{3}, 2, 1\right) + \left(\frac{7}{3}, 2, 4\right) = \left(\frac{8}{3}, 4, 5\right)$$

$$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{8}{3}, 4, 5\right) + \left(\frac{7}{3}, 2, 4\right) = (5, 6, 9)$$