Examen de Matemáticas II (Modelo 2023)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular el valor de m para el cual se verifica que $A^tB = C$.

b) (1 punto) Calcular los valores de m para los cuales existe la inversa de AC y calcular para $m = 0$ la inversa de AC.

c) (0,75 puntos) Calcular el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) $A^tB = \begin{pmatrix} m & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m^2-2 & -m \\ -2m & 1 \\ 3m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 2m^2 - 2 = 0 \\ -m = -1 \\ -2m = -2 \\ 3m = 3 \end{cases} \Longrightarrow m = 1$$

b) $AC = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & 2-m \end{pmatrix}$

$|AC| = 3m^3 + m + 10 = 0$ No tiene solución $\Longrightarrow \exists (AC)^{-1}\ \forall m \in \mathbb{R}$

Si $m = 0 \Longrightarrow AC = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (AC)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4m^2-1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix}$

$B - I = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$B^2 = B - I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4m^2-1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} 4m^2 - 1 = 2m - 1 \\ -2m = -1 \\ 2m = 1 \end{cases} \Longrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Para la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe-e}{e^x-e} & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ \dfrac{1}{4x-3} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar su continuidad y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de sus asíntotas.

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{f(x)}\,dx$

Solución:

a) ☛ La función es continua para cualquier valor $x \neq 1$, son composición de funciones continuas y los denominadores no se anulan nunca.
Continuidad en $x = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{xe-e}{e^x-e} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{e}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{1}{4x-3} = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Longrightarrow f$ es continua en $x = 1 \Longrightarrow$
f es continua en $\mathbb{R}$.

☛ Asíntotas:

- Verticales: No hay, los denominadores no se anulan en en ninguna de las dos ramas.
- Horizontales:
  - Si $x < 1$:
    $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{xe-e}{e^x-e} = \left[\dfrac{-\infty}{-e}\right] = \infty$
    No hay asíntota horizontal por la izquierda.
  - Si $x \geq 1$:
    $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{1}{4x-3} = \left[\dfrac{1}{\infty}\right] = 0$
    Hay una asíntota horizontal por la derecha $y = 0$.
- Oblicuas:
  - Si $x < 1$:
    $m = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{xe-e}{xe^x-xe} = \left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right] \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{e}{xe^x+e^x-e} = -1$
    $n = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(\dfrac{xe-e}{e^x-e}+x\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(\dfrac{xe-e+xe^x-ex}{e^x-e}\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\left(\dfrac{-e+xe^x}{e^x-e}\right) = 1$
    Hay una asíntota oblicua por la izquierda en $y = -x + 1$.
  - Si $x \geq 1$: no puede haber oblicua por haber horizontal.

b) $F(x) = \displaystyle\int \sqrt{\frac{1}{4x-3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4x-3}}\,dx = \int (4x-3)^{-1/2}\,dx = \left[\begin{array}{c} t = 4x-3 \\ dt = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{array}\right] =$

$\displaystyle\int t^{-1/2}\,\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \frac{t^{1/2}}{2} + C = \frac{\sqrt{4x-3}}{2} + C$

$\displaystyle\int_1^5 \sqrt{\frac{1}{4x-3}}\,dx = F(5) - F(1) = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada $ABCD$, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas $A(1,1,1)$ y $B(1,3,1)$. La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x-3z=1$ y el vértice sobre el punto A es $A'(1,1,6)$. Se pide:

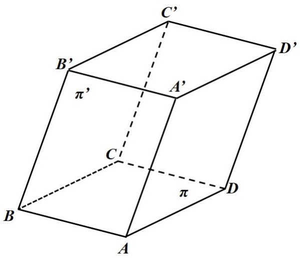
a) (0,5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA'.

b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

Solución:

a) Calculamos el plano π'



$$\pi' : \begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0,2,0) \\ \overrightarrow{AA'}=(0,0,5) \\ A(1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi' : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$10(x-1)=0 \Longrightarrow \pi' : x-1=0$

b) Como la base es un cuadrado $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{0+4+0}=2$

$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{u_\pi}\times\overrightarrow{AB}$ con módulo 2:

$\overrightarrow{u_\pi}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(6,0,8)$, como tiene que tener módulo 2 quedaría

$$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{\sqrt{6^2+0+8^2}}(6,0,8)=\left(\frac{6}{5},0,\frac{8}{5}\right)$$

Luego $D=A+\overrightarrow{AD}=(1,1,1)+\left(\frac{6}{5},0,\frac{8}{5}\right)=\left(\frac{11}{5},1,\frac{13}{5}\right)$

$C=B+\overrightarrow{BC}=B+\overrightarrow{AD}=(1,3,1)+\left(\frac{6}{5},0,\frac{8}{5}\right)=\left(\frac{11}{5},3,\frac{13}{5}\right)$

c) $V=\left|\left[\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|=|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6/5 & 0 & 8/5 \end{vmatrix}|=|-12|=12\ u^3$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal $N(100;35)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0,75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75,17 % de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

Solución:

a) $P(100 \le X \le 140) = P\left(\frac{100-100}{35} \le Z \le \frac{140-100}{35}\right) = P(0 \le Z \le 1,14) =$
$P(Z \le 1,14) - P(Z \le 0) = 0,8729 - 0,5 = 0,3729 = 37,29\,\%$

b) $P(X \le 95) = P\left(Z \le \frac{95-100}{35}\right) = P(Z \le -0,14) = 1 - P(Z \le 0,14) = 1 - 0,5557 =$
$0,4443$

c) $P(X \ge a) = P\left(Z \ge \frac{a-100}{35}\right) = P\left(Z \le \frac{-a+100}{35}\right) = 0,7517 \Longrightarrow \frac{-a+100}{35} = 0,68 \Longrightarrow$
$a = 76,2$

Examen de Matemáticas II (Modelo 2023) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{c} x - y + az = -1 \\ x + ay + 2z = 1 \\ 3x - y + 4z = -1 \end{array}\right.$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema obtenido para aquellos valores de a en los que tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right), \quad |A| = -3a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = 0$$

- ☛ Si $a \ne 1$ y $a \ne 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 3 =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
- ☛ Si $a = 1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$
$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$
- ☛ Si $a = 0$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) =$$
$$\left[\begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones:

$$\left\{\begin{array}{c} x - y + z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + 4z = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x - y + z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2}\lambda \\ y = 1 - \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcr} \dfrac{2}{x-1} & \text{si} & x > 1 \\ \\ \dfrac{x}{|x|} & \text{si} & x \le 1 \text{ y } x \neq 0 \end{array}\right.$$

a) (0,5 puntos) Estudie su dominio y su continuidad.

b) (1 punto) Estudie su crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos.

c) (1 punto) Determine las ecuaciones de las asíntotas, si existieran.

Solución:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcr} \dfrac{2}{x-1} & \text{si} & x > 1 \\ \\ \dfrac{x}{|x|} & \text{si} & x \le 1 \text{ y } x \neq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} -1 & \text{si} & x < 0 \\ 1 & \text{si} & 0 < x \le 1 \\ \dfrac{2}{x-1} & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
La función es continua para cualquier valor $x \neq 0$ y $x \neq 1$, son composición de funciones continuas y los denominadores no se anulan nunca.
Continuidad en $x = 1$:
$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^-} 1 = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty \\ f(1) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$
$\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) \Longrightarrow f$ no es continua en $x = 1$ donde hay una discontinuidad no evitable (hay un salto infinito)
Continuidad en $x = 0$:
$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} (-1) = -1 \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} 1 = 1 \\ f(0) \text{ no existe} \end{array}\right. \Longrightarrow$$
$\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) \Longrightarrow f$ no es continua en $x = 0$ donde hay una discontinuidad no evitable (hay un salto finito)
f es continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

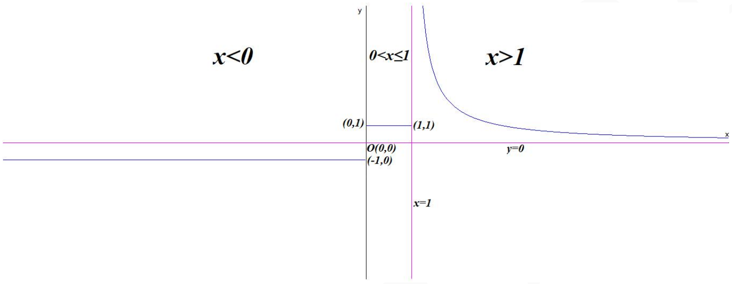
b)

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x < 0 \\ 0 & \text{si} & 0 < x \le 1 \\ -\dfrac{2}{(x-1)^2} & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

La rama $x < 0$ es una recta horizontal $f'(x) = 0$ luego tiene máximo y mínimo relativo en cualquier punto de la rama.
La rama $0 < x \leq 1$ es una recta horizontal $f'(x) = 0$ luego tiene máximo y mínimo relativo en cualquier punto de la rama.
La rama $x > 1 \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2} \neq 0$ luego no tiene máximos ni mínimos relativos.
Como $f'(x) < 0\ \forall x \in (1, \infty) \Longrightarrow f$ es decreciente en toda la rama.
La función no tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto sería cualquier valor $x \in (-\infty, 0)$

c) Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$
  $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (1) = 1$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{2}{x-1} = \left[\dfrac{2}{0^+}\right] = +\infty$
  En $x = 0$ no hay asíntota, es un salto finito.
- Horizontales: La única posible es en la rama $x > 1$
  $$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0 \Longrightarrow y = 0$$
- Oblicuas: No hay, en las ramas $x < 0$ y $0 < x \leq 1$ son rectas horizontales y en la rama $x > 1$ hay asíntota horizontal.



Problema 3 *(2,5 puntos)* Se consideran las siguientes rectas:

- r, la recta que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{u} = (0, 1, 2)$;
- s, la recta de ecuaciones implícitas $s \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$;
- t, la recta paralela a s que contiene al punto P.

a) (0,75 puntos) Estudie la posición relativa de r y s.

b) (0,75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas r y t.

c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta s.

Solución:

a) Tenemos:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u}=(0,1,2)\\ P_r=P(1,1,2)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=1+\lambda\\ z=2+2\lambda\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=4-\lambda\\ z=1+\dfrac{1}{2}\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,1/2)=\dfrac{1}{2}(2,-2,1)\\ P_s(0,4,1)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l}x=2\lambda\\ y=4-2\lambda\\ z=1+\lambda\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(0,4,1)-(1,1,2)=(-1,3,-1)$$

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\left|\begin{array}{ccc}-1&3&-1\\ 0&1&2\\ 2&-2&1\end{array}\right|=9\neq 0\Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) Tenemos $\overrightarrow{u_r}=(0,1,2)$ y $\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_s}=(2,-2,1)$

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r}|\cdot|\overrightarrow{u_s}|}=\frac{|(0,1,2)\cdot(2,-2,1)|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{9}}=\frac{0}{3\sqrt{5}}=0\Longrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}=90^\circ$$

$$r\perp t$$

.

c) Primero calculamos un plano $\pi\perp s$ que contenga $P(1,1,2)$:
$\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{u_s}=(2,-2,1)\Longrightarrow \pi: 2x-2y+z+\lambda=0$ sustituyendo P en $\pi\Longrightarrow 2-2+2+\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-2\Longrightarrow \pi: 2x-2y+z-2=0$
La proyección de P sobre s será el punto P' de corte de π con s:

$$2(2\lambda)-2(4-2\lambda)+(1+\lambda)-2=0\Longrightarrow\lambda=1\Longrightarrow P'(2,2,2)$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Tras reiteradas denuncias por venta de falsificaciones, la inspección aduanera decide examinar sistemáticamente las remesas de dos productos de una determinada marca de lujo. Se encuentra que por término medio el 5 % y el 2 % de las muestras respectivas resulta ser falso. Al abrir un contenedor se encuentra que el 30 % de las piezas son del producto A y el resto, del producto B.

a) (0,75 puntos) Se toma una pieza al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que resulte falsa?

b) (0,5 puntos) Sabiendo que la pieza es falsa, ¿qué probabilidad existe de que sea del primer tipo?

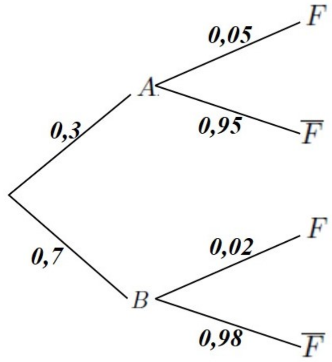
c) (1,25 puntos) Se controla un lote de 1000 piezas del tipo A. Se toma la variable aleatoria "número de piezas falsas". Calcule la probabilidad $P(48\leq X\leq 52)$ aproximando la distribución resultante mediante una normal.

Solución:
Sean F falsificación, A producto A y B producto B.

a) $P(F) = P(F|A)P(A) + P(F|B)P(B) =$
$0,05 \cdot 0,3 + 0,02 \cdot 0,7 = 0,029$

b) $P(A|F) = \dfrac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \dfrac{0,05 \cdot 0,3}{0,029} \simeq 0,5172$

c) $B(1000; 0,05) \overset{N\left(np;\sqrt{npq}\right)}{\approx} N(50; 6,892)$
$P(48 \leq X \leq 52) = P\left(\dfrac{47,5-50}{6,892} \leq Z \leq \dfrac{52,5-50}{6,892}\right) =$
$P(-0,36 \leq Z \leq 0,36) = P(Z \leq 0,36) - (1 - P(Z \leq 0,36)) =$
$2P(Z \leq 0,36) - 1 = 2 \cdot 0,6406 - 1 = 0,2812$



Nota: Al ser una población muy grande $1000 > 100$ y una probabilidad muy pequeña $0,05 < 0,1$ ajustaría mejor una distribución de Poisson.