

Examen de Matemáticas II (Extraordinaria 2023) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

- a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de $A^t A$.
- b) (0,5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b .
- c) (0,75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.
- d) (0,75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5 .

Solución:

$$\text{a) } A^t A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|A^t A| = 0$$

$$\text{b) } BA = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2b & b \\ 2-b & 1 \end{vmatrix} = b^2 = 0 \Rightarrow b = 0$$

Si $b \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(BA) = 2$
Si $b = 0 \Rightarrow \text{Rango}(BA) = 1$

$$\text{c) Si } b = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \dots, B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2,5 puntos) Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

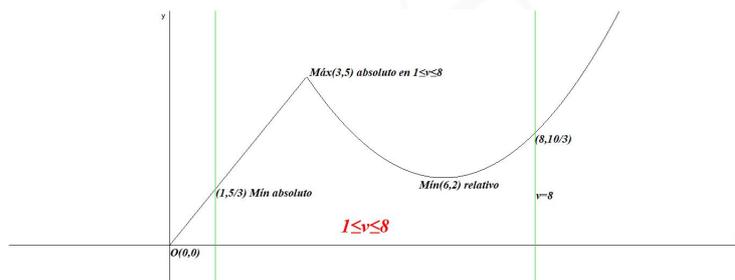
$$c(v) = \begin{cases} \frac{5v}{3} & \text{si } 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \frac{v^2}{3} & \text{si } v \geq 3 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

- b) (1,5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \leq v \leq 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

Solución:

- a) $c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3} \implies c'(v) = -4 + \frac{2v}{3} = 0 \implies v = 6$
 $c''(v) = \frac{2}{3} \implies c''(6) = \frac{2}{3} > 0 \implies v = 6$ es un mínimo relativo, en nuestro caso también es absoluto. El vehículo tiene que circular a 60 km/h para que el consumo sea mínimo.
- b) En la rama $1 \leq v < 3 \implies c(v) = \frac{5v}{3}$ es $c(1) = \frac{5}{3}$ y $c(3) = 5$ el consumo es creciente en esta rama. Cuando la velocidad llega a 3 decenas $c(3) = 5$, a partir de este momento el consumo decrece hasta llegar al mínimo calculado anteriormente $c(6) = 2$ y a partir de esta velocidad el consumo es siempre creciente llegando a $c(8) = \frac{10}{3}$ consumo inferior a $c(3) = 5$, luego el consumo máximo se tiene al circular a 30 km/h máximo absoluto, y el consumo mínimo sería cuando circula a 10 km/h $c(1) = \frac{5}{3}$, mínimo absoluto.



Problema 3 (2,5 puntos) Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q .

- a) (0,25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π .
- b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.
- c) (1,25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r , con la cual forme un ángulo $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Solución:

- a) Sustituyendo P en $\pi \implies 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 = 1 \implies P \in \pi$
 Sustituyendo Q en $\pi \implies 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 = 1 \implies Q \in \pi$

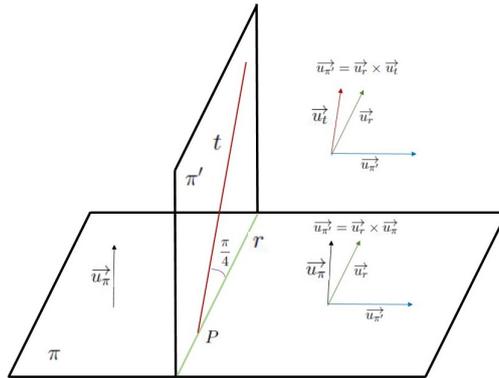
$$b) r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{QP} = (1, 1, 0) \\ P_r = Q(0, 0, 1) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Sustituimos } r \text{ en } z = 0 \implies 0 \cdot \lambda + 0 \cdot \lambda + 1 = 1 \neq 0 \implies r \parallel \{z = 0\}$$

$s \parallel r$ y $s \in \{z = 0\} \implies \vec{u}_r = \vec{u}_s = (1, 1, 0)$ y P_s cualquier punto de $z = 0$ por ejemplo $P_s(0, 0, 0)$:

$$s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

c) Sea el plano $\pi' \perp \pi$ tal que $t \subset \pi'$ y $r = \pi' \cap \pi$, es decir, r es la proyección ortogonal de t sobre π . Si $t : \begin{cases} \vec{u}_t = (a, b, c) \\ P_t = P(1, 1, 1) \end{cases}$ tendremos:



$$\vec{u}_{\pi'} = \vec{u}_r \times \vec{u}_t = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = (c, -c, b-a) \text{ y}$$

$$\vec{u}_{\pi'} = \vec{u}_r \times \vec{u}_{\pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 0) \implies$$

$$(c, -c, b-a) = (1, -1, 0) \implies \begin{cases} c = 1 \\ a = b \end{cases}$$

Por otro lado $\cos(\widehat{r, t}) = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_t|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_t|} = \frac{|(1, 1, 0) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|a + b|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies |a + b| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \implies (a + b)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \implies$

$$2ab = c^2 = 1 \implies \begin{cases} a = b \\ 2ab = 1 \end{cases} \implies a^2 = \frac{1}{2} \implies a = b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

• Si $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \vec{u}_t = (a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, \sqrt{2})$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, \sqrt{2}) \\ P_t = P(1, 1, 1) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \sqrt{2}\lambda \end{cases}$$

• Si $a = b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \implies \vec{u}_t = (a, b, c) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, -\sqrt{2})$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (1, 1, -\sqrt{2}) \\ P_t = P(1, 1, 1) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \sqrt{2}\lambda \end{cases}$$

Problema 4 (2,5 puntos) Sabiendo que $P(A) = 0,5$, $P(A|B) = 0,625$ y $P(A \cup B) = 0,65$, se pide calcular:

- a) (1,5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.
 b) (1 punto) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies 0,625P(B) = P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies 0,65 = 0,5 + P(B) - P(A \cap B) \implies \\ 0,15 &= P(B) - P(A \cap B) \implies 0,15 = P(B) - 0,625P(B) = 0,375P(B) \implies \\ P(B) &= \frac{0,15}{0,375} = 0,4 \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = 0,625P(B) = 0,625 \cdot 0,4 = 0,25$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(A|A \cup B) &= \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0,5}{0,65} = 0,7692 \\ P(A \cap B|A \cup B) &= \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0,25}{0,65} = 0,3846 \end{aligned}$$

Examen de Matemáticas II (Extraordinaria 2023) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos) Dado el sistema $\begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3 \end{cases}$, se pide:

- a) (1,25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k .
 b) (0,5 puntos) Resolverlo para $k = 3$.
 c) (0,75 puntos) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.

Solución:

$$\text{a) } \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & k & 1 \\ k & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & 3 \end{array} \right); \quad |A| = k(3-2k) = 0 \implies$$

$$k = 0, \quad k = \frac{3}{2}$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq \frac{3}{2} \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)

• Si $k = 0$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema Incompatible

• Si $k = \frac{3}{2}$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 4F_2 + 3F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $k = 3$:

$$\begin{cases} -2x + y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = 0 \\ -y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/3 \\ y = -5/3 \\ z = 2/3 \end{cases}$$

Por Gauss:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ 2F_2 + 3F_1 \\ F_3 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 9z = 6 \Rightarrow z = 2/3 \\ y + 14/3 = 3 \Rightarrow y = -5/3 \\ -2x - 5/3 + 2 = 1 \Rightarrow x = -1/3 \end{cases}$$

c) Si $k = \frac{3}{2}$ (SCI):

$$\begin{cases} -2x + y + \frac{3}{2}z = 1 \\ \frac{3}{2}x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -3 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Si $x = 2 \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow y = -1$ y $z = 4$.

Problema 2 (2,5 puntos) Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \text{ y } g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3,$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$

- b) (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

- a) la función es el valor absoluto de un polinomio y es continua en \mathbb{R} , también es derivable en las tres ramas de la función, hay que estudiar la derivabilidad en los puntos $f(x) = 0 \implies 2 + 2x - 2x^2 = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \implies x = 1,62$ y $x = -0,62$.

	$(-\infty; -0,62)$	$(-0,62; 1,62)$	$(1,62; +\infty)$
$f(x)$	-	+	-
$h(x) =$	$-f(x)$	$f(x)$	$-f(x)$

Tenemos:

$$h(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 2 & \text{si } x < -0,62 \\ -2x^2 + 2x + 2 & \text{si } -0,62 \leq x < 1,62 \\ 2x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \geq 1,62 \end{cases} \implies$$

$$h'(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{si } x < -0,62 \\ -4x + 2 & \text{si } -0,62 < x < 1,62 \\ 4x - 2 & \text{si } x > 1,62 \end{cases}$$

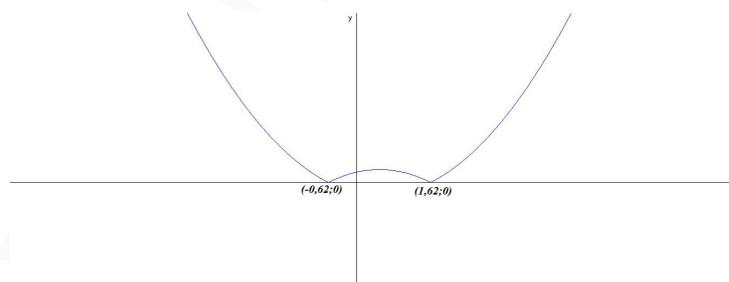
- Derivabilidad en $x = -0,62$:

$$h'(-0,62^-) = -4,47 \text{ y } h'(-0,62^+) = 4,47 \implies h'(-0,62^-) \neq h'(-0,62^+) \implies h \text{ no es derivable en } x = -0,62$$

- Derivabilidad en $x = 1,62$:

$$h'(1,62^-) = -4,47 \text{ y } h'(1,62^+) = 4,47 \implies h'(1,62^-) \neq h'(1,62^+) \implies h \text{ no es derivable en } x = 1,62$$

- La función es continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} - \{-0,62; 1,62\}$



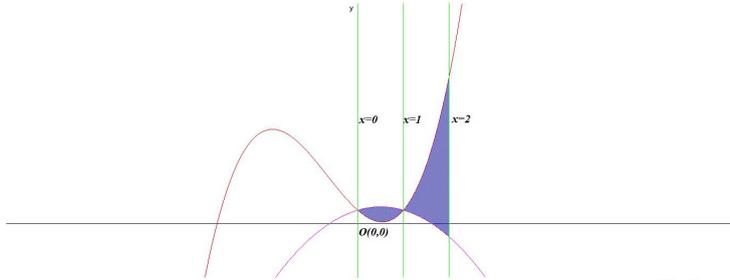
- b) Hacemos $f(x) = g(x) \implies 2 + 2x - 2x^2 = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3 \implies -2x(x^2 + 3x - 4) = 0 \implies x = -4, x = 0$ y $x = 1$. Entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$ las curvas se cortan en $x = 1 \implies$ tendremos dos recintos de integración $S_1 : [0, 1]$ y $S_2 : [1, 2]$

$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (-2x^3 - 6x^2 + 8x) dx = -\frac{x^4}{2} - 2x^3 + 4x^2$$

$$S_1 = \int_0^1 (-2x^3 - 6x^2 + 8x) dx = F(1) - F(0) = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

$$S_2 = \int_1^2 (-2x^3 - 6x^2 + 8x) dx = F(2) - F(1) = -8 - \frac{3}{2} = -\frac{19}{2}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{3}{2} + \frac{19}{2} = \frac{22}{2} = 11 u^2$$



Problema 3 (2,5 puntos) Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

- (0,5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.
- (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π .
- (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r , que esté contenida en π , y que corte al eje OZ .

Solución:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = 5 \end{cases} \implies r : \begin{cases} \vec{u}_r = (0, 1, 0) \\ P_r(2, 0, 5) \end{cases}$$

$$\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0 \implies \vec{u}_\pi = (1, 3, 2)$$

- Calculamos una recta $t \perp \pi$ tal que $O(0, 0, 0) \in t$:

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_\pi = (1, 3, 2) \\ P_t = O(0, 0, 0) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo t en π : $\lambda + 3(3\lambda) + 2(2\lambda) + 14 = 0 \implies \lambda = -1$ y sustituyendo en t tenemos el punto $Q(-1, -3, -2)$

- Sea la recta $s : \begin{cases} \vec{u}_s = (0, 0, 1) \\ P_s = O(0, 0, 0) \end{cases}$ que define el eje OZ . La proyección ortogonal de esta recta sobre el plano π se calcula como la intersección de dos planos, uno es el mismo π y otro π' :

$$\pi' : \begin{cases} \vec{u}_{\pi'} = (1, 3, 2) \\ P_{\pi'} = O(0, 0, 0) \end{cases} \implies \pi' = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3x - y = 0$$

$$\text{La proyección } s' : \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + 3y + 2z + 14 = 0 \end{cases}$$

- c) Sea $\vec{u}_l = (a, b, c)$ el vector director de la recta que buscamos, tiene que cumplirse:

$$\vec{u}_l \perp \vec{u}_\pi = (a, b, c) \cdot (1, 3, 2) = a + 3b + 2c = 0$$

$$\vec{u}_l \perp \vec{u}_r = (a, b, c) \cdot (0, 1, 0) = b = 0$$

$$\text{Luego } \begin{cases} b = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \implies a = -2c \implies \vec{u}_l = (-2c, 0, c) = c(-2, 0, 1)$$

$$\text{Ahora calculamos el punto de corte de } \pi \text{ con } OZ \implies 0 + 0 + 2z + 14 = 0 \implies z = -7 \implies P_l(0, 0, -7)$$

$$l : \begin{cases} \vec{u}_l = (-2, 0, 1) \\ P_l(0, 0, -7) \end{cases} \implies l : \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 0 \\ z = -7 + \lambda \end{cases}$$

Problema 4 (2,5 puntos) El 65 % de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consiguen a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

- (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.
- (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.
- (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

Solución:

- a) Tenemos una binomial $B(10; 0, 35)$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot 0,35^3 \cdot 0,65^7 = 0,2522$$

- b) Tenemos una binomial $B(10; 0, 35)$

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,35^0 \cdot 0,65^{10} = 0,9865$$

- c) Ahora tenemos una binomial $B(60; 0, 65)$. Como $n > 10$, $np = 39 > 5$ Y

$$nq = 21 > 5 \implies B(60; 0, 65) \stackrel{N(np, \sqrt{npq})}{\approx} N(39; 3, 6946)$$

$$P(X \geq 30) = P\left(Z \geq \frac{29,5 - 39}{3,6946}\right) = P(Z \geq -2,57) = P(Z \leq 2,57) = 0,9949$$