Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

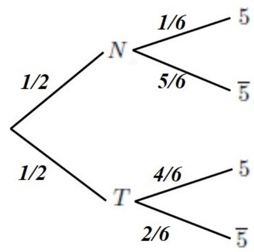
Abril 2023

Problema 1 Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

a) Calcula la probabilidad de sacar 5.

b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?

Solución:
Sea N : dado normal y T : el dado truncado.
Tenemos $P(N) = P(T) = \dfrac{1}{2}$, $P(5|N) = \dfrac{1}{6}$ y $P(5|T) = \dfrac{4}{6}$.



a) $P(5) = P(5|N)P(N) + P(5|T)P(T) = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{12} = 0,4167$

b) $P(T|5) = \dfrac{P(5|T)P(T)}{P(5)} = \dfrac{4/6\cdot 1/2}{5/12} = \dfrac{2}{5} = 0,8$

Problema 2 En una clase de bachillerato, el 40 % han aprobado filosofía y el 50 % matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar filosofía habiendo aprobado también matemáticas es de 0,8.

a) ¿Qué tanto por ciento de alumnos suspende ambas asignaturas?

b) Calcule el porcentaje de alumnos que, teniendo aprobada la filosofía, aprueba también las matemáticas.

Solución:
Sea M al suceso "aprueba matemáticas" y F al suceso "aprueba filosofía":

$$P(M) = 0,5,\ \ P(F) = 0,4 \ \text{y}\ P(F|M) = 0,8 = \frac{P(F\cap M)}{P(M)} \Longrightarrow P(F\cap M) = 0,8\cdot 0,5 = 0,4$$

	F	$\overline{F}$	Total
M	$0,4$		$0,5$
$\overline{M}$			
	$0,4$	$0,2$	

$\Longrightarrow$

	F	$\overline{F}$	Total
M	$0,4$	$0,10$	$0,5$
$\overline{M}$	0	$0,5$	$0,5$
	$0,4$	$0,6$	1

a) $P(\overline{F} \cap \overline{M}) = 0,5 \Longrightarrow 50\,\%$

b) $P(M|F) = \dfrac{P(M \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,4}{0,4} = 1 \Longrightarrow 100\,\%$

Problema 3 Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?

c) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a clase?

Solución:
Sea $N(30,5)$

a) $P(X \leq 40) = P\left(Z \leq \dfrac{40-30}{5}\right) = P(Z \leq 2) = 0,9772$

b) $P(20 \leq X \leq 40) = P\left(\dfrac{20-30}{5} \leq Z \leq \dfrac{40-30}{5}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) = P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 2)) = 2P(Z \leq 2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544$

c) $P(X \geq 40) = P\left(Z \geq \dfrac{40-30}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

Problema 4 En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

a) Tres chicas.

b) Al menos tres chicos.

Solución:
LLamamos A : chica.

$$p = P(A) = \frac{16}{20} = 0,8 \Longrightarrow B(20;0,8)$$

a) $P(X = 3) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array}\right) 0,8^3 0,2^2 = 0,2048$

b) Si hay 3 chicos quiere decir que hay 2 chicas, que hay 4 chicos quiere decir que hay 1 chica y que salgan 5 chicos quiere decir que han salido 0 chicas. Está claro que 5 chicos no puede haber.

$P = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} 0,8^0 0,2^5 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} 0,8^1 0,2^3 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 0,8^2 0,2^3 = 0,0579$

Problema 5 El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69,50 % de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16,60 % de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?

b) Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

Solución:

$$N(\mu, \sigma)$$

a) $P(X \le 5061,2) = 0,6950$ y $P(X \ge 5116,4) = 0,1660 \Longrightarrow P(X \le 5116,4) = 1 - 0,1660 = 0,834$

$P(5061,2 \le X \le 5116,4) = P(X \le 5116,4) - P(X \le 5061,2) = 0,834 - 0,695 = 0,139$

b)

$$P(X \le 5061,2) = \left(\frac{5061,2 - \mu}{\sigma}\right) = 0,6950 \Longrightarrow \frac{5061,2 - \mu}{\sigma} = 0,51 \Longrightarrow 0,51\sigma + \mu = 5061,2$$

$$P(X \le 5116,4) = \left(\frac{5116,4 - \mu}{\sigma}\right) = 0,834 \Longrightarrow \frac{5116,4 - \mu}{\sigma} = 0,97 \Longrightarrow 0,97\sigma + \mu = 5116,4$$

$$\begin{cases} 0,51\sigma + \mu = 5061,2 \\ 0,97\sigma + \mu = 5116,4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mu = 5000 \\ \sigma = 120 \end{cases}$$

Problema 6 En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0,4, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.

c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

Solución:

a) Se trata de una binomial $B(30;0,4)$, $n = 30 > 10$, $np = 30 \cdot 0,4 = 12 > 5$ y $nq = 30 \cdot 0,6 = 18$. La distribución binomial se puede aproximar mediante una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(12; 2,6833)$

b) $P(X = 8) = \binom{30}{8} 0,4^8 0,6^{22} = 0,0505$. De otra manera:
$P(X = 8) = P(7,5 \le X \le 8,5) = P\left(\frac{7,5-12}{2,6833} \le Z \le \frac{8,5-12}{2,6833}\right) =$
$P(-1,68 \le Z \le -1,30) = P(Z \le -1,30) - P(Z \le -1,68) =$
$(1 - P(Z \le 1,30)) - (1 - P(Z \le 1,68)) = P(Z \le 1,68) - P(Z \le 1,30) =$
$0,9535 - 0,9032 = 0,0503$

c) $P(10 \le X \le 20) = P\left(\frac{9,5-12}{2,6833} \le Z \le \frac{20,5-12}{2,6833}\right) = P(-0,93 \le Z \le 3,17) =$
$P(Z \le 3,17) - P(Z \le -0,93) = P(Z \le 3,17) - (1 - P(Z \le 0,93)) =$
$P(Z \le 3,17) + P(Z \le 0,93) - 1 = 0,9992 + 0,8238 - 1 = 0,823$