Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2023

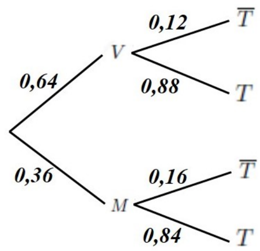
Problema 1 Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12 %, mientras que la de que una mujer lo esté es del 16 %. Además, la probabilidad de ser varón es del 64 % y la de ser mujer del 36 %.

a) Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?

b) Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

c) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizados con personas en disposición de trabajar.
Solución:
Sea T trabaja, $\overline{T}$ en paro, V varón y M mujer.
$P(\overline{T}|V) = 0,12$, $P(\overline{T}|M) = 0,16$, $P(V) = 0,64$ y $P(M) = 0,36$.



a) $P(M \cap \overline{T}) = P(M)P(\overline{T}|M) = 0,36 \cdot 0,16 = 0,0576$

b) $P(\overline{T}) = P(V)P(\overline{T}|V) + P(M)P(\overline{T}|M) = 0,64 \cdot 0,12 + 0,36 \cdot 0,16 = 0,1344$

c) $P(M|\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{T}|M)P(M)}{P(\overline{T}} = \dfrac{0,16 \cdot 0,36}{0,1344} = 0,4286$

Problema 2 En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de segundo de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80 % disponía de ordenador, el 15 % disponía de móvil y el 10 % disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro.

a) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos).

b) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.

Solución:
Sea O : dispone de ordenador, M dispone de móvil
$P(O) = 0,8$, $P(M) = 0,15$ y $P(O \cap M) = 0,1$.

a) $P(O \cup M) = P(O) + P(M) - P(O \cap M) = 0,8 + 0,15 - 0,1 = 0,85$

b) $P(\overline{O} \cap \overline{M}) = P(\overline{O \cup M}) = 1 - P(O \cup M) = 1 - 0,85 = 0,15$

Problema 3 Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a) No salga defectuoso.

b) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C.

Solución:
A: fábrica A, B: fábrica B, C: fábrica C y D: defectuoso.
$P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$, $P(C) = 0,5$, $P(D|A) = 0,04$, $P(D|B) = 0,1$ y $P(D|C) = 0,02$
$P(D \cap A) = P(D|A)P(A) = 0,04 \cdot 0,3 = 0,012$; $P(D \cap B) = P(D|B)P(B) = 0,1 \cdot 0,2$ y $P(D \cap C) = P(D|C)P(C) = 0,02 \cdot 0,5$

	A	B	C	Total
D	0,012	0,02	0,01	
$\overline{D}$				
	0,3	0,2	0,5	

$\Longrightarrow$

	A	B	C	Total
D	0,012	0,02	0,01	0,042
$\overline{D}$	0,288	0,18	0,49	0,958
	0,3	0,2	0,5	

a) $P(\overline{D}) = 0,958$

b)

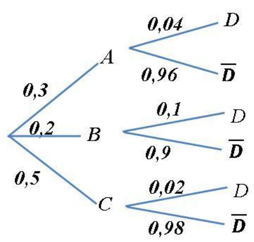
	$\overline{C}$	C	Total
D	0,032	0,01	0,042
$\overline{D}$	0,468	0,49	0,958
	0,5	0,5	

$$\Longrightarrow P(\overline{C}|D) = \frac{P(\overline{C} \cap D}{P(D)} = \frac{0,032}{0,042} = 0,7619$$

De otra manera:
a)

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|A)P(A) + P(\overline{D}|B)P(B) + P(\overline{D}|C)P(C) =$$

$$0,96 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 + 0,98 \cdot 0,5 = 0,958$$



b)

$$P(\overline{C}|D) = \frac{P(\overline{C} \cap D)}{P(D)} = \frac{0,3 \cdot 0,04 + 0,2 \cdot 0,1}{1 - 0,958} = 0,7619$$

Problema 4 Una máquina automática que rellena botellas de un refresco está presuntamente regulada para que rellene cada botella con 250 ml. Sin embargo, se sabe que la cantidad real de líquido que hay en cada botella se representa por una variable aleatoria Normal de media 250 ml y varianza 400.

a) Se considera que una botella está correctamente rellenada si contiene entre 240 y 260 ml. ¿Cuál es la probabilidad de que una botella esté correctamente rellenada?

b) Por otra parte, las botellas con un contenido inferior a 210 ml deben ser desechadas. ¿Cuál es la probabilidad de que se deseche una botella?

Solución:
Tenemos $N(250, \sqrt{400}) = N(250, 20)$

a) $P(240 \leq X \leq 260) = P\left(\frac{240-250}{20} \leq Z \leq \frac{260-250}{20}\right) = P(-0,5 \leq Z \leq 0,5) = P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq -0,5) = P(Z \leq 0,5) - (1 - P(Z \leq 0,5)) = 2P(Z \leq 0,5) - 1 = 2 \cdot 0,6915 - 1 = 0,383$

b) $P(X \leq 210) = P\left(Z \leq \frac{210-250}{20}\right) = P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

Problema 5 De los estudiantes universitarios españoles, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente

a) ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales)

b) ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

Solución:
Sea S el suceso "abandona los estudios" luego $p = P(S) = 0,2$, $q = 1 - p = 0,8$ y $n = 5$. Se trata de una distribución binomial $B(5; 0,2)$

a) $P(X \leq 1) = P(X = 1) + P(X = 0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} 0,2^1 0,8^4 + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} 0,2^0 0,8^5 = 0,73728$

b) $P(X = 0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} 0,2^0 0,8^5 = 0,32768$

$P(X = 5) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} 0,2^5 0,8^0 = 0,00032$

Es más probable que ninguno abandone los estudios a que los abandonen todos.

Problema 6 Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el baloncesto y al 30 % les gustan ambos deportes.

a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?

b) Se eligen 100 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que como mucho a 75 les guste el fútbol.

c) Si en el apartado anterior la muestra hubiese sido de 10 alumnos, y no de 100 ¿cuál hubiese sido la probabilidad de que exactamente a 5 les gustase el fútbol?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \le x)$, $x \ge 0$: $F(1,5) = 0,9332$; $F(1,375) = 0,9154$; $F(1,25) = 0,8944$; $F(1,125) = 0,8697$; $F(1) = 0,8413$) **Solución:**
Sean F al suceso "fútbol" y B al suceso "baloncesto" Tenemos $P(F) = 0,8$, $P(B) = 0,4$ y $P(\cap B) = 0,3$

a) $P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(\cap B) = 0,8 + 0,4 - 0,3 = 0,9$

b) Tenemos $p = P(F) = 0,8 \Longrightarrow B(100; 0,8)$, $n > 10$, $np = 80 > 5$ y $nq = 20 > 5$ la podemos aproximar con una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(80,4)$
$P(X \le 75) = P\left(Z\frac{75,5-80}{4}\right) = P(Z \le -1,125) = 1 - P(Z \le 1,125) = 1 - 0,8697 = 0,1303$

c) Si $n = 10 \le 10$, $np = 8 \ge 5$ y $nq = 2 < 5$, luego $B(10; 0,8)$ no se puede aproximar por una normal.

$$P(X = 5) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 5 \end{array}\right) 0,8^5 0,2^5 = 0,02642$$