Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato CN
Enero 2023

Problema 1 Calcula los siguientes límites

a) Mediante el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}\,dx$.

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty}(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})$

Solución:

a) $$\int \frac{2}{2+e^x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=e^x\\ dt=e^x dx\\ dx=\dfrac{dt}{e^x}=\dfrac{dt}{t}\end{array}\right] = \int \frac{2}{t(2+t)}\,dt = \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{t(2+t)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{2+t}=\dfrac{A(2+t)+Bt}{t(2+t)}\\ 2=A(2+t)+Bt\\ t=0\Longrightarrow A=1\\ t=-2\Longrightarrow B=-1\\ \dfrac{2}{t(2+t)}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2+t}\end{array}\right] =$$

$$\int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{2+t}\,dt = \ln|t| - \ln|2+t| + C = \ln|e^x| - \ln|2+e^x| + C = x - \ln|2+e^x| + C$$

b) $$\lim_{x\longrightarrow+\infty}(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}) = [\infty-\infty] =$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7})(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7})}{(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7})} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(\sqrt{x^4-x^2+1})^2-(\sqrt{x^4-7})^2}{(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7})} = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{-x^2+8}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] =$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{-x^2}{\sqrt{x^4}+\sqrt{x^4}} = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

Problema 2 Considere la función $f(x) = (x+10)e^{2x}$

a) Calcule un primitiva $F(x)$ tal que $F(0)=0$. Use la derivada para comprobar su solución.

b) Calcule $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$

Solución:

a) $$F(x) = \int (x+10)e^{2x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u=x+10\Longrightarrow du=dx\\ dv=e^{2x}dx\Longrightarrow v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right] = \frac{(x+10)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$

$$\frac{(x+10)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x+19)e^{2x}}{4} + C$$

$$F(0)=0\Longrightarrow C=-\frac{19}{4}\Longrightarrow F(x)=\frac{(2x+19)e^{2x}}{4}-\frac{19}{4}$$

b) $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx = F(5) - F(0) = \frac{29e^{10} - 19}{4} \simeq 1,596871270 \cdot 10^5$

Problema 3 Se pide:

a) Sea $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x \sin x}{3\cos x - 3}$

Solución:

a) $\dfrac{2x+3}{x^2+3x+1} = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$, que está fuera del intervalo de integración $[0, 2]$.

$$S = \int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx = \ln|x^2+3x+1|\Big]_0^2 = \ln 11 \ u^2$$

b) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x \sin x}{3\cos x - 3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x + x\cos x}{-3\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x\sin x}{-3\cos x} = -\frac{2}{3}$

Problema 4 Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

Nota: En la integral *b*) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

Solución:

a) $F(x) = \displaystyle\int (x+1)e^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x+1 \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+2)$

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx = F(1) - F(0) = 2 - \frac{3}{e} \simeq 0,896$$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Longrightarrow x = t^2 \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \Longrightarrow dx = 2tdt \end{array}\right] = \int \frac{2t}{t(1+t^2)}\,dt = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C$

Problema 5 Calcula $\int xe^{-4x}\,dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

Solución:

$$\int xe^{-4x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-4x}dx \Longrightarrow v = -\frac{1}{4}e^{-4x} \end{array}\right] = -\frac{xe^{-4x}}{4} + \frac{1}{4}\int e^{-4x}\,dx = -\frac{xe^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16} + C = -e^{-4x}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{16}\right) + C = -e^{-4x}\left(\frac{4x+1}{16}\right) + C$$

Problema 6 Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}\,dx$ explicando el método seguido para dicho cálculo.

Solución:

$$\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}\,dx = \left[\begin{array}{c} \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+1)}{(x+1)(x+3)} \\ 8x+7 = A(x+3)+B(x+1) \\ x = -3 \Longrightarrow -17 = -2B \Longrightarrow B = 17/2 \\ x = -1 \Longrightarrow -1 = 2A \Longrightarrow A = -1/2 \\ \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{17/2}{x+3} \end{array}\right] =$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{17}{2}\int \frac{1}{x+3}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{17}{2}\ln|x+3| + C$$