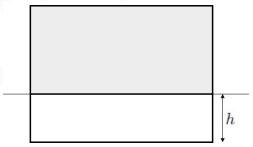
Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Abril 2023

Problema 1 Se tienen 20 m de marco metálico para construir una valla publicitaria rectangular.

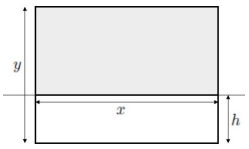
El terreno donde se quiere instalar la valla es fangoso y al colocarla se hunde una altura h que es la quinta parte de la anchura de la valla. Calcula las medidas de la valla de forma que el área visible (la sombreada en la figura) sea la máxima posible.



Solución:

- El perímetro del cartel es $P(x,y) = 2x + 2y = 20 \Longrightarrow y = 10 - x$
- La altura undida es $h = \dfrac{x}{5}$
- El área que hay que optimizar es

$$S(x) = x(y-h) = x\left(10 - x - \frac{x}{5}\right) = \frac{2x(25-3x)}{5}$$



- Optimización:

$$S'(x) = \frac{2(25-6x)}{5} = 0 \Longrightarrow x = \frac{25}{6}$$

$$S''(x) = -\frac{12}{5} \Longrightarrow S''\left(\frac{25}{6}\right) = -\frac{12}{5} < 0 \Longrightarrow x = \frac{25}{6} \text{ es un mínimo}$$

Las dimensiones son $x = \dfrac{25}{6} \simeq 4,167$ m de ancho e $y = 10 - \dfrac{25}{6} = \dfrac{35}{6} \simeq 5,833$ m de alto.

Problema 2 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas.

b) Halla, si existen: máximos y mínimos relativos y calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
Asíntotas:

☛ Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{2x^3+1}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{2x^3+1}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

☛ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^3+1}{x^2} = \infty$$

☛ Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^3+1}{x^3} = 2$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^3+1}{x^2} - 2x \right) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^3+1-2x^3}{x^2} =$$

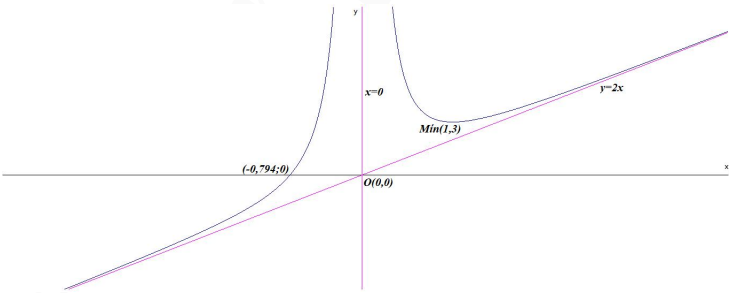
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \Longrightarrow y = 2x$$

b) $f'(x) = \dfrac{2(x^3-1)}{x^3} \Longrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece ↗	decrece ↘	crece ↗

La función crece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 1)$ con un mínimo relativo en el punto $(1, 3)$

c) Grafica:



Problema 3 Calcula:

a) $\lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sin x - xe^x}{x^2 - 2\cos x + 2}$

b) Una primitiva de la función $f(x) = x\cos x - e^{-x}$ cuya gráfica pase por el punto $(0, 3)$.

Solución:

a) $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sin x - xe^x}{x^2-2\cos x+2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\cos x - e^x - xe^x}{2x+2\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$
$\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{-\sin x - e^x - e^x - xe^x}{2+2\cos x}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

b) $F(x)=\displaystyle\int (x\cos x - e^{-x})\,dx=\left[\begin{array}{l} u=x\Longrightarrow du=dx \\ dv=\cos x\,dx\Longrightarrow v=\sin x\end{array}\right]=$
$x\sin x-\displaystyle\int \sin x\,dx+e^{-x}=x\sin x+\cos x+e^{-x}+C$
$F(0)=0+1+1+C=3\Longrightarrow C=1$ luego $F(x)=x\sin x+\cos x+e^{-x}+1$

Problema 4 Se pide:

a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

b) Comprueba si la función $f(x)=x^2-4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3,3]$.

Solución:

a) Continuidad en $x=1$:

$$\begin{cases}\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}(ax^2+bx+2)=a+b+2 \\ \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^+}(a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2})=a-b\end{cases}\Longrightarrow a+b+2=a-b\Longrightarrow b=-1$$

Derivabilidad en $x=1$:

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2b}{x^3} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1^-)=2a+b \\ f'(1^+)=\dfrac{a}{2}+2b\end{cases}\Longrightarrow 2a+b=\frac{a}{2}+2b\Longrightarrow 3a-2b=0$$

$$\begin{cases} b=-1 \\ 3a-2b=0\end{cases}\Longrightarrow a=-2/3$$

b) La función $f(x)=x^2-4$ es continua en el intervalo $[-3,3]$, derivable en el intervalo $(-3,3)$ y $f(3)=f(-3)=5$. Luego verifica las condiciones del teorema de Rolle y podemos concluir que $\exists c\in[-3,3]/f'(c)=0$.

Se puede calcular este punto:
$f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y como $f''(x) = 2 \Longrightarrow f''(0) = 2 > 0 \Longrightarrow x = 0$ es un mínimo. El punto $c = 0$.

;; www.inusat.net ;;