Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2023

Problema 1 Considere la función: $f(x) = \dfrac{x^2}{1-e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas cuando existan.
Solución:

- Verticales: $1 - e^{-x} = 0 \Longrightarrow x = 0$ No es asíntota ya que

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2}{1-e^{-x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2x}{e^{-x}} = 0$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^2}{1-e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{-\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{-x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{2}{-e^{-x}} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{x^2}{1-e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{1}\right] = \infty$$

- Oblicuas: Cuando $x \longrightarrow -\infty$ no hay por haber horizontales, estudiamos cuando $x \longrightarrow \infty$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{x - xe^{-x}} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x}{1-e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{1}\right] = \infty$$

  Luego no hay oblicuas.

Problema 2 Se considera la siguiente función $f(x) = \ln(2x+1)$

a) Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) Halle la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \dfrac{1}{2}$

Solución:

a) $2x+1 > 0 \Longrightarrow x > -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$.
$f'(x) = \dfrac{2}{2x+1} \neq 0 \Longrightarrow$ no hay extremos y crece en el intervalo $\left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$

b) $b = \left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln 2$ y $m = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 \Longrightarrow y - \ln 2 = 1\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \Longrightarrow y = x - \left(\dfrac{1}{2} - \ln 2\right)$

Problema 3 Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}\cdot \ln^2 x\right)\, dx$

Solución:

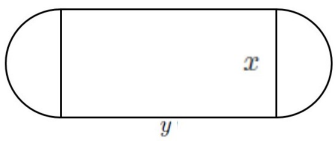
$$\int \left(\sqrt{x}\cdot \ln^2 x\right)\, dx = \left[\begin{array}{c} u=\ln^2 x \Longrightarrow du = \dfrac{2\ln x dx}{x} \\ dv = x^{1/2}dx \Longrightarrow v = \dfrac{2x^{3/2}}{3} \end{array}\right] = \frac{2x^{3/2}\ln^2 x}{3} - \frac{4}{3}\int x^{1/2}\ln x\, dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} u=\ln x \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^{1/2}dx \Longrightarrow v = \dfrac{2x^{3/2}}{3} \end{array}\right] = \frac{2x^{3/2}\ln^2 x}{3} - \frac{4}{3}\left[\frac{2x^{3/2}\ln x}{3} - \frac{2}{3}\int x^{1/2}dx\right] =$$

$$\frac{2x^{3/2}\ln^2 x}{3} - \frac{4}{3}\left[\frac{2x^{3/2}\ln x}{3} - \frac{4x^{3/2}}{9}\right] = \frac{2x^{3/2}\ln^2 x}{3} - \frac{8x^{3/2}\ln x}{9} + \frac{16x^{3/2}}{27} =$$

$$\frac{2x^{3/2}(9\ln^2 x - 12\ln x + 8)}{27} + C$$

Problema 4 Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base y metros y altura x metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)



Su superficie se desea que sea de $4+\pi$ m^2. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle x e y de modo que se verifique este requisito.

Solución:
El radio de las semicircunferencias es $r=\dfrac{x}{2}$. El área encerrada es:

$$S(x,y) = xy + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{4xy+\pi x^2}{4} = 4+\pi \Longrightarrow y = \frac{4(\pi+4)-\pi x^2}{4x}$$

La longitud del contorno que hay que optimizar será la función:

$$L(x,y) = 2x + 2y + 2\pi\frac{x}{2} \Longrightarrow L(x) = 2x + \frac{4(\pi+4)-\pi x^2}{2x} + \pi x =$$

$$\frac{4x^2+4(\pi+4)-\pi x^2+2\pi x^2}{2x} = \frac{4(\pi+4)+(\pi+4)x^2}{2x}$$

$$L'(x) = \frac{2x(\pi+4)2x - (4(\pi+4)+(\pi+4)x^2)2}{4x^2} = \frac{2x^2(\pi+4)-4(\pi+4)-(\pi+4)x^2}{2x^2} =$$

$$\frac{(\pi+4)(2x^2-4-x^2)}{2x^2}=\frac{(\pi+4)(x^2-4)}{2x^2}=0\Longrightarrow x^2-4=0\Longrightarrow x=\pm 2$$

La solución negativa no es relevante.

	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$L'(x)$	$-$	$+$
$L(x)$	decrece $\searrow$	crece $\nearrow$

La función decrece en el intervalo $(0,2)$ y crece en el intervalo $(2,\infty)$, por tanto, tiene un mínimo en $x=2\Longrightarrow y=\dfrac{4(\pi+4)-4\pi}{8}=2$

Las medidas del rectángulo son 2 m de ancho, 2 m de largo y 1 m el radio de las circunferencias.